MATEMÁTICA FINANCIERA

Marcelo Eduardo Sánchez Salazar
Julio Cesar López Ayala
Mónica Isabel Izurieta Castelo
Víctor Gabriel Avalos Peñafiel

CASA EDITORA DEL POLO

Matematica Financiera

Marcelo Eduardo Sánchez Salazar
https://orcid.org/0000-0002-6275-812X
Docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo,Riobamba

Julio Cesar López Ayala
https://orcid.org/0000-0002-8625-1091
Docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo,Riobamba

Mónica Isabel Izurieta Castelo
https://orcid.org/0000-0002-7545-6411
Docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo,Riobamba

Víctor Gabriel Avalos Peñafiel
https://orcid.org/0000-0001-8278-7991
Docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo,Riobamba

CASA EDITORA DEL POLO

Casa Editora del Polo - CASEDELPO CIA. LTDA.
Departamento de Edición

Editado y distribuido por:

Editorial: Casa Editora del Polo
Sello Editorial: 978-9942-816
Manta, Manabí, Ecuador. 2019
Teléfono: (05) 6051775 / 0991871420
Web: www.casedelpo.com
ISBN: 978-9942-621-17-7

© Primera edición
© Marzo - 2023
Impreso en Ecuador

Revisión, Ortografía y Redacción:
Lic. Jessica Mero Vélez

Diseño de Portada:
Michael Josué Suárez-Espinar

Diagramación:
Ing. Edwin Alejandro Delgado-Veliz

Director Editorial:
Dra. Tibisay Milene Lamus-García

Constancia de Arbitraje

La Casa Editora del Polo, hace constar que este libro proviene de una investigación realizada por los autores, siendo sometido a un arbitraje bajo el sistema de doble ciego (peer review), de contenido y forma por jurados especialistas. Además, se realizó una revisión del enfoque, paradigma y método investigativo; desde la matriz epistémica asumida por los autores, aplicándose las normas APA, Sexta Edición, proceso de anti plagio en línea Plagiarisma, garantizándose así la cientificidad de la obra.

Comité Editorial

Contenido

INTRODUCCIÓN

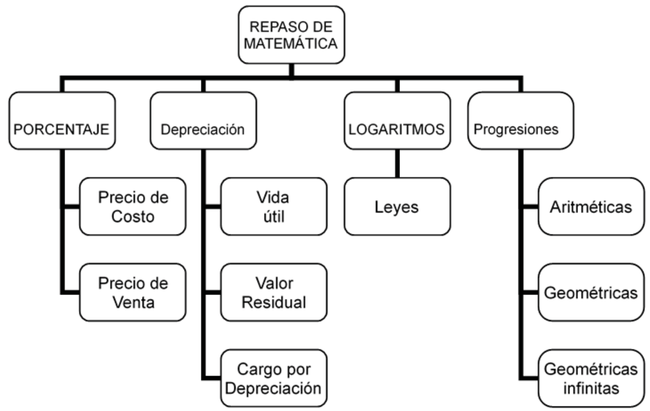
La matemática financiera es una aplicación del extenso campo de la matemática que permite resolver la mayoría de transacciones financieras sobre las cuales gira el sector empresarial en general, resuelve múltiples y variados problemas de aplicación diaria, como son: operaciones de crédito, ahorros, inversiones, descuentos, negociaciones, cálculo de valores actuales y utilización de documentos financieros. También se aplica en la elaboración de tablas de amortización como base para créditos a mediano y largo plazo, en operaciones de seguros, análisis financieros, interpretación de estados financieros y contables, que deben ser conocidos por un contador o por un administrador.

CAPÍTULO I

REPASO DE CONOCIMIENTOS DE MATEMÁTICA

Esta Unidad le permite hacer un repaso de la matemática básica que se utiliza con más frecuencia en esta materia.

En primer lugar se revisa el uso de porcentajes que son indispensables en la administración de empresas. Por ejemplo en la preparación de presupuestos y en la fijación de márgenes de utilidad y de descuentos especiales.



1.1 porcentaje:

Se conoce con el término porcentaje o tanto por ciento a la

Proporcionalidad que se establece con relación a cada cien unidades. Para calcular un porcentaje o un valor de un porcentaje se utiliza una regla de tres directa.

Un porcentaje también se puede expresar en tanto por uno, por ejemplo el 25% representa el 0,25 en tanto por uno.

Ejemplo 1.1

Calcular el 5% de 500

Por regla de tres

100%	500	$X = \frac{(5)500}{100} = 25$
5%	X	

Directamente con tanto por uno

(500) 0,05=25

Ejemplo 1.2

¿Qué porcentaje de 500 es 60?

500	100%	$X = \frac{60\,(100)}{500} = 12\,\%$
60	X	

Aplicaciones:

- Descuento por compra al contado
- Descuento por compra al contado con aplicación de impuestos
- Cálculo de porcentaje del precio de costo
- Cálculo de porcentaje sobre el precio de venta

Precio de venta = Precio de costo + utilidad

PV = PC + U

El margen de utilidad bruta es el precio que se le suma

al costo para fijar el precio de venta de un producto, es decir cubre los gastos indirectos y la utilidad neta.

Utilidad neta es el precio o importe que quedan luego de haber deducido todos los gastos del margen de utilidad bruta.

Se conocen como gastos indirectos, a aquellos gastos como por ejemplo, arriendos de un local, pago de servicios básicos, mantenimiento de equipos, seguros, etc.

Ejemplo 1.3 Descuento por compra al contado

Calcular el valor de una factura de venta de un vehículo cuyo precio de lista es de 20000 dólares, si se ofrece el 12% de descuento por venta al contado.

Precio de lista	$ 20 000
Descuento (20000) (0,12)	$ - 2 400
Valor de la factura	$ 17 600

Ejemplo 1.4 Descuento por compra al contado con aplicación de impuestos

Calcular el valor de la factura de venta de un vehículo cuyo precio de lista es de 17000 dólares con el 15% de descuento por la compra al contado, si se aplica el 12% de impuesto a las ventas.

Precio de lista	$ 17 000
Descuento (17000) (0,15)	$ - 2 550
Precio con descuento	$ 14 450
Impuesto (14450) (0,12)	$ +1 734
Valor de la factura	$ 16 184

Ejemplo 1.5 Calculo del porcentaje sobre el precio de costo

Un comerciante desea obtener una utilidad o beneficio de 20% sobre el precio de costo de un producto que adquirió en 2500, calcular el precio de venta.

Precio de venta = Precio de costo + utilidad

Precio de venta = 2 500 + 2 500(0,20)

Precio de venta = 2 500 + 500

Precio de venta = 3 000

Ejemplo 1.6 Calculo del porcentaje sobre el precio de venta

Un comerciante desea vender lavadoras que tienen un costo de 800 dólares cada una, con una utilidad del 20% sobre el precio de venta. Calcular el precio al que se debe vender cada una.

Precio de venta = precio de costo + utilidad

Precio de venta – utilidad = precio de costo

Precio de venta – 0,20(precio de venta) = 800

$$PV(1-0{,}20)=800$$
$$PV(0{,}80)=800$$
$$PV=\frac{800}{0{,}80}$$
$$PV=1000$$

Precio de venta = 1 000 dólares

1.2. Depreciación:

Es la pérdida de valor de un bien o activo, maquinaria, edificios, equipos, etc., debido al uso, desgaste, u otros factores.

Para reemplazar el activo al fin de su vida útil se establece un fondo, separando periódicamente cierta cantidad que debe ser igual al costo de reemplazo luego de la vida útil.

Vida útil:

Es la duración probable de un bien o activo; se estima con base a la experiencia o a informes de expertos.

Costo inicial: (CI)

Valor del bien o activo en la fecha de compra

Valor de salvamento o valor residual: (VS)

Valor que conserva el bien cuando ha dejado de ser útil.

Cargo por depreciación: (CD)

Depósitos periódicos que se realizan en el fondo para depreciación

Para realizar algunos ejercicios utilizaremos el método de depreciación uniforme o de línea recta, que consiste en tomar cada año un valor de depreciación constante.

$$(CD) = \frac{(CI) - (VS)}{N}$$

N; número de años de vida útil si está la depreciación en función de años

N; número de horas de vida útil, cuando la depreciación se calcula en horas de operación

N; número de unidades de vida útil, cuando la depreciación se calcula en función del número de unidades producidas.

Ejemplo 1.7

Una maquinaria cuyo costo fue de 240.000 dólares se le estima un valor de salvamento de 20.000 dólares luego de 50. 000 horas de funcionamiento. Calcular el cargo por depreciación anual y elaborar una tabla (vida útil de la maquinaria es de 10 años)

$$CD = \frac{240\,000 - 20000}{50\,000}$$

$D = 4,4$ dólares por cada hora de trabajo de la maquinaria

Como dura 10 años entonces 5 000 horas por 4,4 = 22 000 dólares al año

Tiempo	Unidades producidas	cargo por depreciación	Fondo para depreciación	Valor en Libros
				240000
1	5000	22000	22000	218000
2	5000	22000	44000	196000
3	5000	22000	66000	174000
4	5000	22000	88000	152000
5	5000	22000	110000	130000
6	5000	22000	132000	108000
7	5000	22000	154000	86000
8	5000	22000	176000	64000
9	5000	22000	198000	42000
10	5000	22000	220000	20000

Ejercicio 1.8

Calcular el cargo por depreciación anual de un equipo cuyo costo fue 32 000 dólares, si su vida útil se estima en 12 años y su valor de salvamento en el 15% de su valor original. Elaborar una tabla en la que se exprese el valor en los libros contables.

Valor de salvamento = 32000(0,15) = 4800 dólares

$$CD = \frac{32000 - 4800}{12}$$

Cargo por depreciación anual es de 2266,67 dólares

Tiempo	cargo por depreciación	Fondo de depreciación	Valor en libros
			32000
1	2266,67	2266,67	29733,33
2	2266,67	4533,33	27466,67
3	2266,67	6800,00	25200,00
4	2266,67	9066,67	22933,33
5	2266,67	11333,33	20666,67
6	2266,67	13600,00	18400,00
7	2266,67	15866,67	16133,33
8	2266,67	18133,33	13866,67
9	2266,67	20400,00	11600,00
10	2266,67	22666,67	9333,33
11	2266,67	24933,33	7066,67
12	2266,67	27200,00	4800,00

1.3. Logaritmos

El logaritmo de un número positivo N en base b es el exponente x que da el número N

$\log_b N = x$ que es lo mismo decir $b^x = N$

Los logaritmos más usados son los de base 10 llamados vulgares o decimales y se evita la base en su escritura.

log 1000 = 3

significa que es log de base 10

Se debe tener presente las siguientes propiedades

- El logaritmo de un producto es igual al logaritmo del primer factor más el logaritmo del segundo factor,

log A.B=log A+log B

- El logaritmo de un cociente es igual

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

- $\log A^n = n \cdot \log A$

Ejemplo 1.9

Calcular i en $(1+i)^{18}=3{,}379932$

Se aplican logaritmos a los dos lados

$$\log(1+i)^{18} = \log 3{,}379932$$

$$18 \log(1+i) = 0{,}528907962$$

$$\log(1+i) = \frac{0{,}28907962}{18}$$

$$(1+i) = anti\log 0{,}0293837$$

$$1 + i = 1{,}07$$

$$i = 1{,}07 - 1$$

$$i = 0{,}07 \text{ (tanto por uno)}$$

Es decir es el 7%

Ejemplo 1.10

Calcular n en $(1+0{,}05)^{-n}=0{,}014339$

Al aplicar logaritmos

$$log(1+0{,}05)^{-n} = log\, 0{,}014339$$

$$-n\, log\, 1{,}05 = log\, 0{,}014339$$

$$-n = \frac{log\, 0{,}014339}{log\, 1{,}05}$$

$$-n = -87$$

$n = 87$ periodos

1.4. Progresiones:

Una progresión es una sucesión cuya les de formación es simple

1.4.1. Progresiones aritméticas:

Es una sucesión de números, llamados términos, en la que cualquier término posterior al primero se forma del término anterior sumando o restando un número fijo llamado diferencia (d)

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \cdots + [a + (n - 1)d]$$

$U = a + (n - 1)\, d$ $\qquad S = \frac{n}{2}(a + U)$

U = último término

a = primer término

n = número de términos

d = diferencia

S = suma de los términos de una progresión aritmética

1.4.2. Progresión geométrica

Es una sucesión de términos tales que cada uno de ellos se deduce del anterior multiplicándole o dividiéndole por un número fijo llamado razón (r)

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}$$

$$S = \frac{ar^n - a}{r - 1}$$

$U=ar^{n-1}$

U = último término

a = primer término

n = número de términos

r = diferencia

S = suma de los términos de una progresión geométrica

1.4.3. Progresión geométrica infinita

Es aquel tipo de progresión geométrica cuya razón es menor que la unidad, el número de términos es ilimitado, pero la suma de sus términos es cuantificable.

$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \cdots$ $\qquad$ r = 1/5

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

Ejemplo 1.11

Encontrar el vigésimo término, y la suma de los 20 primeros términos de la progresión aritmética

115, 112, 109, 106, . . .

En donde; a = 115

n = 20

d = -3

Utilizamos la fórmula para encontrar el término 20

U = a + (n – 1) d

U = 115 + (20 – 1)(-3)

U = 115 + 19(-3)

U = 115 – 57

U = 58   Es el valor del término vigésimo

Pare encontrar la suma de los 20 primeros términos utilizamos

$$S = \frac{n}{2}(a + U)$$

$$S = \frac{20}{2}(115 + 58)$$

$$S = 10(173)$$

$S = 1730$ Es la suma de los 20 primeros términos

Ejemplo 1.12

Encontrar el término 10 y la suma de los 10 primeros de la progresión geométrica de: 100; 50; 25;. . .

En donde: r = 0,50

a = 100

n = 10

Para encontrar el término 10 utilizamos

$$U = ar^{n-1}$$

$$U = 100(0{,}50)^9$$

$U = 0{,}195312$ es el término 10

Para encontrar la suma de los 10 términos

$$S = \frac{ar^n - a}{r - 1}$$

$$S = \frac{100(0{,}50)^{10} - 100}{0{,}50 - 1}$$

$S = 199{,}80469$ Suma de los 10 primeros términos de la progresión

Ejemplo 1.13

En el día de hoy cierta maquinaria tiene un valor de 15 000 dólares, si al final de cada año se deprecia en 15% ¿Cuál será su valor después de 10 años?

Final del primer año = 15000-15000(0,15) = 12750

Final del segundo año = 12750 – 12750(0,15) = 10837,5

La progresión tendríamos

15000; 12750; 10837,5;. . .

Para hallar el valor al final de los 10 años tendríamos

a = 15000

r = 0,85

n = 11

Utilizando la fórmula

$$U = ar^{n-1}$$

$$U = 15000(0,85)^{11-1}$$

$$U = 2953,12$$

1.5. Ecuaciones y despeje de fórmulas:

El estudiante deberá conocer como se resuelve una ecuación de primero y segundo grado así como también será capaz de despejar una incógnita de una fórmula.

Ejemplo 1.14

Encontrar el valor de x en la ecuación:

$$8x + \frac{2}{3}x = 24 + \frac{2}{3}x$$

$$8x + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x = 24$$

$$8x = 24$$

$$x = 3$$

1.6. Problemas propuestos

1. ¿De qué número es 1500 el 35%?

2. Una empresa compra 200 barriles de petróleo a 100 dólares el barril:

a) Calcular el costo de la misma cantidad de barriles de petróleo a 120 dólares

b) Expresar en porcentaje el aumento del precio de costo

c) Expresar en porcentaje el aumento del precio de venta

3. Calcular i en:

a) $(1+i)^{15} = 2{,}147109$

b) $(1+i)^{70} = 3{,}999558$

c) $(1+i)^{35} = 28{,}666723$

4. Un comerciante se compromete en pagar en forma ascendente durante 24 meses una deuda por la compra de un automóvil; el primer pago 800 dólares; el segundo pago es de 840 dólares; el tercer pago es de 880 dólares; y así sucesivamente ¿Cuánto habrá pagado en total

durante los 24 meses?

5. Encontrar la suma de las siguientes progresiones geométricas decrecientes

a) 2; 1; 0,5; . . .

b) 1; 1/5; 1/25; 1/125; . . .

6. Despejar x en las siguientes ecuaciones

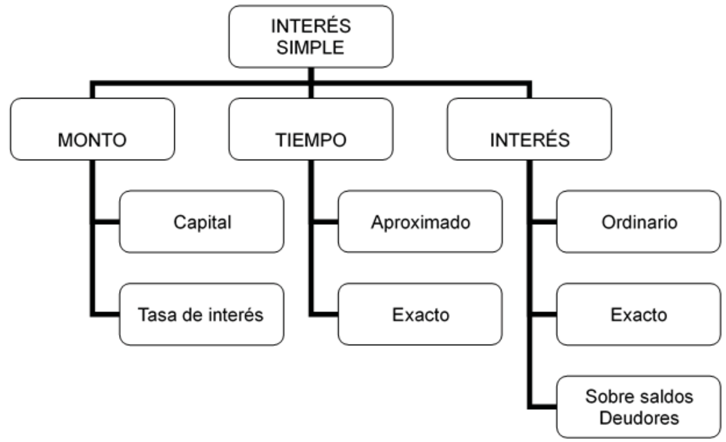
a) (1+0,5x)+8x-2,5x-48=12+(1+1,5x)

b) 0,5x+16-3,5x=32-5x+4

CAPÍTULO II

INTERÉS SIMPLE

Esté capítulo está dedicado a los principios del **Interés Simple** y constituye la base de la matemática financiera, en razón de sus múltiples aplicaciones en los negocios y en el sistema financiero.



Es importante señalar que en todas las actividades comerciales y financieras se acostumbra a pagar un precio por el uso del dinero. Es por eso que la mayor parte de los ingresos de las instituciones financieras y de las compañías de inversión provienen de los intereses generados sobre préstamos o de las utilidades que han generado las inversiones.

Cosa similar sucede en las actividades comerciales, sobre todo cuando se efectúan operaciones a plazos, donde se utiliza ampliamente el préstamo, por parte del sector privado como del estado.

A manera de síntesis se puede afirmar que:

2.1. Interés (I)

Es el dinero que debe pagarse al final de periodos determinados de tiempo como compensación al dinero prestado depositado o invertido.

2.2. Capital (C)

Es el dinero que se da o toma a préstamo, se invierte en cuentas de ahorro o cuentas corrientes con intereses, se invierte en acciones, etc. El capital se llama también valor actual o valor presente.

2.3. Tasa de Interés (i)

Es la razón del interés devengado al capital en la unidad de tiempo. Está dado como un porcentaje o su equivalente que es el tanto por uno, generalmente se toma el año como unidad de tiempo.

Ejemplo 2.1

$$i = \frac{interés}{Capital} = \frac{18}{100} = 0{,}18 = 18\%$$

2.4. Monto (M)

Es la suma del capital y el interés producido, Es la cantidad de dinero que se tiene al final de periodos determinados de tiempo.

M = C + I (1)

El **Interés se llama Simple** cuando solamente el capital original produce intereses, durante el tiempo completo de la transacción. Este tipo de interés se emplea generalmente cuando la transacción es por un periodo de tiempo corto.

En la práctica comercial el interés se le considera directamente proporcional al capital y al tiempo.

$$\left.\begin{matrix} I \,\alpha\, C \\ I \,\alpha\, t \end{matrix}\right\} I \,\alpha\, C \cdot t$$ o sea I = k · C · t

El coeficiente de proporcionalidad k depende de las condiciones del mercado y es igual a la tasa de interés. Es decir:

I = C · i · t (2)

En donde:

I = interés

C = capital o valor presente

i = tasa anual de interés en tanto por uno

t = tiempo en años

si relacionamos la fórmula (1) y (2) tendríamos

$$M = C + I$$
$$M = C + C \cdot i \cdot t$$
$$M = C(1 + i \cdot t)$$

Ejemplo 2.2

Determine el interés simple sobre $ 750 al 4% durante medio año. ¿Cuál será su monto?

C=750

i = 0,04	I = C·i·t
t = 0,5 años	I = 750·0,04·0,5
	I = 15 dólares de interés

M = C + I

M = 750 + 15

M = 765 dólares tienen de monto

2.5. Cálculo del tiempo:

2.5.1. Tiempo aproximado:

Por facilitar el cálculo del tiempo se acostumbra utilizar un año de 360 días dividido en 12 meses de 30 días cada uno es decir un mes comercial.

2.5.2. Tiempo exacto:

Se toma como referencia el número de días calendario, es decir meses de 30 y 31 días, año de 365 y 366 días según corresponda.

2.6. Variación del cálculo de interés:

2.6.1. Interés exacto

Cuado se divide el tiempo para 365 o 366 días si la tasa de interés es anual.

2.6.2. Interés Ordinario:

Si dividimos el tiempo para 360 días en iguales condiciones, es decir para un año comercial.

Ejemplo 2.3

Calcular el interés exacto y ordinario de un capital de 20000 dólares al 9% de interés anual, del 10 de abril al 15 de septiembre del mismo año.

Solución:

Primero calculemos el tiempo exacto y el tiempo aproximado

Tiempo exacto		Tiempo aproximado
Abril	20	como del 10 de abril
Mayo	31	al 15 de septiembre
Junio	30	hay 5 meses con 5 días
Julio	31	entonces a los meses
Agosto	31	se multiplica por 30 y
Septiembre	15	se suma los 5 días,
Total de días	158	5·30 + 5 = 155

a) Interés exacto con tiempo exacto

$$I = C \cdot i \cdot t$$

$$I = (20000)(0,09)\frac{158}{365}$$

$$I = 779,18\ \$$$

b) Interés exacto con tiempo aproximado;

$$I = C \cdot i \cdot t$$

$$I = (20000)(0,09)\frac{155}{365}$$

$$I = 764,38\ \$$$

c) Interés ordinario con tiempo exacto;

$$I = C \cdot i \cdot t$$

$$I = (20000)(0,09)\frac{158}{360}$$

$$I = 790\$$$

d) Interés ordinario con tiempo aproximado

$$I = C \cdot i \cdot t$$

$$I = (20000)(0,09)\frac{155}{360}$$

$$I = 775\$$$

Importante:

Cuando no se especifique el tipo de interés se debe hallar siempre un interés ordinario, es decir dividir para 360, y si nos dan fechas exactas se debe hallar el tiempo exacto, caso contrario se debe utilizar el tiempo aproximado

La tasa de interés debe estar en tanto por uno y no en tanto por ciento

El tiempo y la tasa de interés deben coincidir con la unidad de tiempo, es decir si la tasa de interés es mensual el tiempo debe estar expresada en meses, si la tasa de interés es anual el tiempo debe estar expresado en años, así sucesivamente.

Ejemplo 2.4

Calcular el interés que gana un capital de 100000 dólares al 15% de interés anual durante 180 días.

Solución;

C = 100000

i = 0,15 anual

tiempo debe estar en años por lo que dividimos para 360 días

t = 180/360 = 0,5 años

$$I = C \cdot i \cdot t$$

$$I = (100000)(0,15)(0,5)$$

$$I = 7500\$$$

Ejemplo 2.5

Calcular el interés que gana un capital de 100000 dólares al 7,5% de interés semestral durante 180 días.

Solución;

C = 100000

i = 0,075 semestral

tiempo debe estar en semestres por lo que dividimos para 180 días que tiene un semestre

t = 180/180 = 1 semestre

$$I = C \cdot i \cdot t$$

$$I = (100000)(0,075)(1)$$

$$I = 7500\$$$

Ejemplo 2.6

Calcular el interés que gana un capital de 100000 dólares al 3,75% de interés trimestral durante 180 días.

Solución;

C = 100000

i = 0,035 trimestral

tiempo debe estar en trimestres por lo que dividimos para 90 días que tiene un trimestre

t = 180/90 = 2 trimestres

I=C·i·t

I=(100000)(0,035)(2)

I=7500$

Ejemplo 2.7

Calcular el interés que gana un capital de 100000 dólares al 1,25% de interés mensual durante 180 días.

Solución;

C = 100000

i = 0,0125 mensual

tiempo debe estar en meses por lo que dividimos para 30 días que tiene un mes

t = 180/30 = 6 meses

I=C·i·t

I=(100000)(0,0125)(6)

I=7500$

Ejemplo 2.8

Determine de acuerdo con el sistema bancario, el interés simple sobre $ 4280, al 6% del 21 de marzo al 25 de julio del mismo año.

Solución;

El número exacto de días es 125 (se halla días exactos porque nos dan fechas de calendario)

C = 4280

i = 0,06 anual

t = 125/360 años

$$I = C \cdot i \cdot t$$

$$I = (4280)(0,06)\frac{125}{360}$$

$$I = 89{,}17\,\$$$

Ejemplo 2,9

Determine de acuerdo con el sistema bancario, el interés simple sobre $ 3575, al $4\frac{3}{4}$% durante 80 días.

Solución;

C = 3575

i = 0,0475 anual

t = 80/360 años

$$I = C \cdot i \cdot t$$

$$I = (3575)(0,0475)\frac{80}{360}$$

$$I = 37{,}74\,\$$$

Ejemplo 2.10

¿Qué capital produjo un interés de $ 1800 a una tasa de interés de 20% anual en 180 días?

Solución;

I = 1800

i = 0,20 anual

t = 180/360 = 0,5 años

$$I = C \cdot i \cdot t$$

$$C = \frac{I}{i \cdot t}$$

$$C = \frac{1800}{0,20(0,5)}$$

$$C = 18000\$$$

Ejemplo 2.11

¿A qué tasa de interés anual se coloca un capital de $ 18000 para que produzca un interés de $1800 en 180 días?

Solución;

I = 1800

C = 18000

t = 180/360 = 0,5 años

$I = C \cdot i \cdot t$

$i = \frac{I}{C \cdot t}$

$i = \frac{1800}{18000(0{,}5)}$

$i = 0{,}20$ tanto por uno

$i = 20\%$ anual

Ejemplo 2.12

¿En qué tiempo un capital de $ 85000 ganará un interés de $4500 al 18% anual?

Solución;

I = 4500

C = 85000

i = 0,18 anual

$I = C \cdot i \cdot t$

$t = \frac{I}{C \cdot i}$

$t = \frac{4500}{85000(0{,}18)}$

$t = 0{,}294118$ años

$t = 0{,}294118(360) = 105{,}88\ días$

$t = 106\ días\ aproximadamente$

Ejemplo 2.13

Calcular el monto de un capital de $15000 al 1,8% mensual durante 180 días.

Solución;

C = 15000

i = 0,018 mensual

t = 180/30 = 6 meses

M=C(1+i·t)

M=15000(1+0,018·6)

M=16620$

Ejemplo 2.14

De un documento de $ 100000, con vencimiento en 180 días, se desea conocer su valor actual 60 días antes de su vencimiento, considerando una tasa de interés del 18% anual.

Solución;

M = 100000

i = 0,18 anual

t = 60/360 = 1/6 años

$$M = C(1 + i \cdot t)$$

$$C = \frac{M}{1 + i \cdot t}$$

$$C = \frac{100000}{1 + 0{,}18 \cdot \frac{1}{6}}$$

$$C = 97087{,}38\ \$$$

2.6.3. Interés sobre saldos deudores:

En muchas instituciones financieras y casas comerciales que operan con crédito a clientes se acostumbra a utilizar el mecanismo de calcular el interés sobre los saldos deudores, es decir sobre los saldos que van quedando después de deducir cada cuota que se paga.

Otros establecimientos comerciales utilizan el método de acumulación de intereses o método del lagarto, denominado así por el excesivo interés que cobran

Ejemplo 2.15

Una empresa vende automóviles a un precio de lista de $600000, con el 25% de cuota inicial y el saldo a 36 meses de plazo, y una tasa de interés del 3% mensual, calcular la cuota fija mensual que debe pagar el cliente:

a) por el método de acumulación de intereses (método del lagarto)

b) Por el método de saldos deudores

Solución:

Cuota inicial = 600000(0,25) = 150000 $

Saldo a Pagar en 36 meses = 600000-150000 = 450000

a) Al calcular la cuota mensual fija mediante el método de acumulación de intereses o método del lagarto, se obtiene.

C=450000

i = 0,03 mensual

t = 36 meses

$$M = C(1 + i \cdot t)$$

$$M = 450000(1 + 0{,}03 \cdot 36)$$

$$M = 936000$$

$$\text{Cuota mensual fija} = \frac{936000}{36} = 26000\ \$$$

Como puede apreciarse, en este método se acumula los intereses durante todo el periodo de la deuda, es decir se calcula el monto y luego se divide entre el número de pagos o cuotas, este método utilizan la mayoría de tarjetas de crédito.

b) Método de saldos deudores.

Valor de la cuota sin interés = $\frac{450000}{36} = 12500\ \$$

Interés pagado en la primera cuota

$$I = 450000 \cdot (0{,}03) \cdot 1 = 13500$$

Valor de la primera cuota = cuota de capital + interés

= 12500 + 13500

= 26000 $

En la segunda cuota se reduce el capital en 12500 y queda un saldo de 437500, en consecuencia el interés será

I=425000·(0,03)·1=12750

Valor de la segunda cuota = cuota de capital + interés

= 12500 + 13125

= 25625 $

Tercera cuota: se reduce el capital en 12500 y queda un saldo de 425000, en consecuencia el interés será

I=425000·(0,03)·1=12750

Valor de la tercera cuota = cuota de capital + interés

= 12500 + 12750

= 25250 $

Al calcular el valor de la última cuota (cuota 36) se tiene saldo de la deuda de $12500 en consecuencia el interés será

I=12500·(0,03)·1=375

Valor de la última cuota = cuota de capital + interés

= 12500 + 375

= 12875 $

Se puede elaborar una tabla financiera de las cuotas

Periodo	Deuda	interés	Capital	Cuota
1	450000	13500	12500	26000
2	437500	13125	12500	25625
3	425000	12750	12500	25250
4	412500	12375	12500	24875
5	400000	12000	12500	24500
6	387500	11625	12500	24125
7	375000	11250	12500	23750
8	362500	10875	12500	23375
9	350000	10500	12500	23000
10	337500	10125	12500	22625
11	325000	9750	12500	22250
12	312500	9375	12500	21875
13	300000	9000	12500	21500
14	287500	8625	12500	21125
15	275000	8250	12500	20750
16	262500	7875	12500	20375
17	250000	7500	12500	20000
18	237500	7125	12500	19625
19	225000	6750	12500	19250
20	212500	6375	12500	18875
21	200000	6000	12500	18500
22	187500	5625	12500	18125
23	175000	5250	12500	17750
24	162500	4875	12500	17375
25	150000	4500	12500	17000
26	137500	4125	12500	16625
27	125000	3750	12500	16250
28	112500	3375	12500	15875
29	100000	3000	12500	15500
30	87500	2625	12500	15125
31	75000	2250	12500	14750
32	62500	1875	12500	14375
33	50000	1500	12500	14000
34	37500	1125	12500	13625
35	25000	750	12500	13250
36	12500	375	12500	12875
Total		249750	450000	699750

La cuota fija mensual puede calcularse dividiendo el total de cuotas entre el número de pagos o cuotas:

$$\text{Cuota fija mensual} = \frac{\textit{valor total de pagos o cuotas}}{\textit{número de cuotas}}$$

$$\text{Cuota fija mensual} = \frac{699750}{36} = 19437{,}50\,\$$$

También se puede encontrar la cuota fija por este método sin necesidad de elaborar la tabla utilizando la media aritmética entre la primera cuota y la última cuota.

$$\text{Cuota fija mensual} = \frac{\text{Primera cuota} + \text{última cuota}}{2}$$

$$\text{Cuota fija mensual} = \frac{26000 + 12875}{2} = 19437{,}50\ \$$$

2.7. Problemas propuestos

1. ¿En qué tiempo se incrementará en \$ 8000 un capital de 55000 colocado al $2\frac{1}{4}\%$ anual?

2. ¿A qué tasa de interés mensual un capital de \$ 85000 será ¼ parte más en 300 días?

3. Calcular;

a) el valor al vencimiento de un documento de \$30000 suscrito el 19 de abril con vencimiento en 180 días a un interés del 1% mensual

b) la fecha de vencimiento

c) su valor el 15 de julio del mismo año si se considera una tasa de interés del 18% anual.

4. Una empresa invierte \$150000 durante un año y 3 meses, por lo que obtiene un interés de \$21000, calcular la tasa de interés anual que se le reconoció.

5. Una empresa comercial ofrece un grupo de refrigeradoras cuyo precio de lista es de \$ 580000 con el 10% de cuota inicial y el saldo a 30 meses de plazo, con una tasa de interés del 2% mensual. Calcular la cuota mensual fija que debe pagar el cliente,

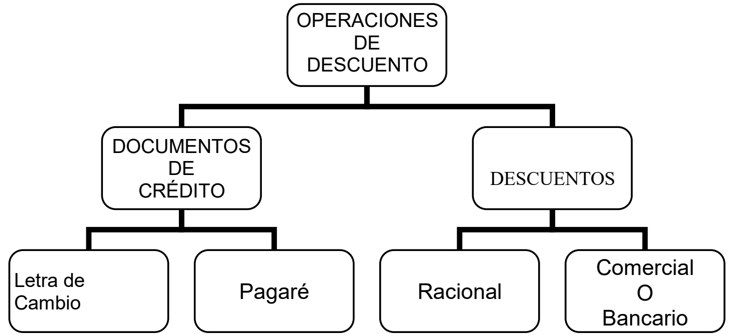
a) por el método de acumulación de intereses (lagarto)

b) por el de saldos deudores.

CAPÍTULO III

OPERACIONES DE DESCUENTO

Analizaremos ahora, el capítulo tercero dedicado a las operaciones de descuento



Esta operación es una de las más usadas en el sistema financiero, cuando una persona natural o jurídica desea obtener un poco de dinero en efectivo a cambio de un documento cuyo vencimiento ocurrirá en el futuro. En consecuencia se puede definir como **"descuento"**, la operación mediante la cual se negocia un documento por un importe en efectivo inferior al de la fecha de vencimiento. Esta diferencia constituye el descuento y lógicamente la utilidad del comprador y el valor entregado al propietario del documento, valor descontado o precio del documento.

3.1. Documentos de crédito:

3.1.1. Letra de Cambio:

Documento de crédito consistente en una orden escrita, por la que una persona denominada girador encarga a otra, llamada girado o aceptante, que pague a una tercera persona llamada tenedor, una determinada cantidad de dinero a cierta fecha.

Es común que haya solo dos personas involucradas pues es el girador puede coincidir con el tenedor.

El tenedor o beneficiario es la persona a cuyo favor se emite la letra de cambio. La letra es susceptible de transferencia mediante el endoso correspondiente. La letra que no se especifica un plazo se considera como cancelable a la vista.

3.1.2. Pagaré:

El tenedor del documento tiene el derecho de recibir una cantidad de dinero en determinada fecha.

En los referidos documentos se pueden destacar los siguientes datos para el efecto de este texto:

Valor Nominal: valor del documento sin intereses a la fecha de suscripción

Valor al vencimiento o monto: valor del documento con intereses a la fecha de vencimiento, si no se consideran intereses coincide con el valor nominal.

Fecha de suscripción: fecha en la cual se suscribe el documento

Fecha de negociación o descuento: fecha en la que se descuenta, compra o vende el documento

Plazo: duración en días del documento

Valor de negociación: valor actual a la fecha del descuento compra o venta del documento

Interés: suma de dinero que se obtiene o se paga sobre el capital.

3.2. Descuento racional: (Dr)

Descuento racional o descuento simple a una tasa de interés es la diferencia entre el monto o valor a la fecha de vencimiento de un documento o deuda y el valor presente.

Dr = monto – valor actual

Dr = M – C

Ejemplo 3.1

Calcular el descuento racional de un documento de $ 150000 suscrito el 30 de junio a 180 días de plazo, si se descontó el 30 de noviembre del mismo año con una tasa de interés del 24% anual.

Solución:

En este ejemplo el valor nominal es igual al monto puesto que no gana intereses

M = 150000

Fecha de vencimiento = 27 de diciembre (se cumple los 180 días)

Fecha de descuento 30 de noviembre

Días que faltan para el vencimiento = del 30 de noviembre al 27 de diciembre = 27 días

t = 27/360

i = 0,24

$$C = \frac{M}{1 + i \cdot t}$$

$$C = \frac{150000}{1 + 0{,}24(27/360)}$$

$C = 147347{,}74$ \$ (valor actual con descuento racional)

$$Dr = M - C$$

$$Dr = 150000 - 147347{,}74$$

$Dr = 2652{,}26$ \$ (descuento racional)

Ejemplo 3.2

Un documento por \$ 6000 establece 5% de interés simple por 120 días de plazo, si B descuenta 30 días antes del vencimiento para obtener el 4% de interés simple, ¿Cuál es el descuento racional?

Solución:

Por haber intereses en el documento primero se debe hallar el monto

C = 6000

i = 0,05 anual

t = 120 días = 120/360=1/3 años

M=C(1+i·t)

M=6000(1+0,05·1/3)

M=6100

t = 30 días = 30/360 = 1/12 años

i = 0,04

$$C = \frac{M}{1 + i \cdot t}$$

$$C = \frac{6100}{1 + 0{,}04(1/12)}$$

$C = 6079{,}73$ \$ (valor actual con descuento racional)

$$Dr = M - C$$

$$Dr = 6100 - 6079{,}73$$

$Dr = 20{,}27$ \$ (descuento racional)

3.3. Descuento bancario, comercial o bursátil: (Db)

Se utiliza en las operaciones comerciales y consiste en cobrar los intereses por anticipado; es decir su calculo se realiza sobre el monto o valor al vencimiento. Se emplea una tasa de descuento (d) para diferenciar la tasa de interés que se aplica al calculo del valor actual

Se denomina tasa de descuento al interés porcentual que se aplica al valor nominal del documento a la fecha de su vencimiento. Expresando en forma similar a la fórmula de interés simple.

Db = M·d·t

En donde :

Db = descuento bancario o descuento bursátil

M = valor del documento a la fecha de vencimiento

D = tasa de descuento

T = tiempo transformado a años

3.4. Valor actual con descuento bancario o valor efectivo. (Cb)

El valor actual o presente con descuento bancario se identifica como la diferencia entre el valor al vencimiento del documento y el descuento bancario.

Cb = M – Db

Cb = M – M·d·t

Cb = M(1 – d·t)

$$M = \frac{Cb}{1 - d \cdot t}$$

Ejemplo 3.3

¿Cuál es el descuento bancario que un banco aplica a un cliente que descuenta un pagaré de $80000 en el día de hoy, a 120 días de plazo, considerando una tasa de descuento del 12% anual?

Solución:

Como no existe tasa de interés en el documento entonces el monto es:

M = 80000

t = 120 días= 120/360 = 1/3 años

d = 0,12 anual

Para calcular el descuento bancario se aplica la fórmula:

Db=M·d·t

Db=80000·0,12·1/3

Db=3200 $ (descuento bancario)

Ejemplo 3.4

Un banco carga el 5% de descuento simple en préstamos a corto plazo. Determinar el valor del documento sin intereses, dado al banco si el prestatario recibe $ 2500 por 60 días.

Solución:

C = 2500

d = 0,05 anual

t = 60 días = 60/360 = 1/6 años

Para calcular el valor del documento se debe hallar el monto

$$M = \frac{Cb}{1 - d \cdot t}$$

$$M = \frac{2500}{1 - 0{,}05 \cdot 1/6}$$

$M = 2521{,}01$ $ (valor del documento)

Ejemplo 3.5

Un cliente de un banco solicita un préstamo de $10000, a 180 días de plazo, calcular el valor efectivo que debe recibir si se aplican una tasa se descuento del 18% anual. ¿Cuál será el descuento bancario?

Solución:

En este caso el banco calcula por anticipado el interés

M = 10000

d = 0,18 anual

t = 180 días = 180/360 = 0,5 años

Cb = M(1 – d·t)

Cb=10000(1-0,18·0,5)

Cb=9100$ (valor efectivo)

Db=M·d·t

Db=10000·0,18·0,5

Db=900 $ (descuento bancario o comercial)

Ejemplo 3.6

Calcular el valor efectivo que recibe una persona que realiza un descuento de una letra de cambio de $12000 suscrita el 15 de marzo sin intereses a 180 días de plazo, si se descontó el 21 de junio del mismo año al 18% anual.

Solución:

Se calcula la fecha de vencimiento y los días comprendidos entre la fecha de descuento y la fecha de vencimiento.

Plazo		Tiempo de descuento	
Marzo	6	Junio	9
Abril	30	Julio	31
Mayo	31	Agosto	31
Junio	30	Septiembre	11
Julio	31	Total	82 días
Agosto	31		
Septiembre	11		
Total	180 días		

M = 12000

d = 0,18 anual

t = 82 días = 82/360 anos

Cb = M(1 – d·t)

Cb=12000(1-0,18·82/360)

Cb=11508$ (valor efectivo)

3.5. Relación entre la tasa de interés y la tasa de descuento

$$i = \frac{d}{1 - d \cdot t} \qquad d = \frac{i}{1 + i \cdot t}$$

Ejemplo 3.7

Un banco desea ganar el 6% de interés simple por el descuento de documentos. ¿Qué tasa de descuento debe utilizar si el periodo de descuento es a) 2 meses b) 240 días?

Solución:

a) i = 0,06 anual
t = 2 meses = 2/12 = 1/6 años

$$d = \frac{i}{1 + i \cdot t}$$

$$d = \frac{0{,}06}{1 + 0{,}06 \cdot 1/6}$$

$$d = 0{,}0594$$

$$d = 5{,}94\%$$

b) i = 0,06 anual

t = 240 días = 240/360 = 2/3 años

$$d = \frac{i}{1 + i \cdot t}$$

$$d = \frac{0{,}06}{1 + 0{,}06 \cdot 2/3}$$

$$d = 0{,}0577$$

$$d = 5{,}77\%$$

Ejemplo 3.8

¿A que tasa de interés equivale una tasa de descuento del 21% anual durante 90 días?

Solución:

d = 0,21 anual

t = 90 días = 90/360 = ¼ años

$$i = \frac{d}{1 - d \cdot t}$$

$$i = \frac{0{,}21}{1 - 0{,}21 \cdot 1/4}$$

$$i = 0{,}22164$$

$$i = 22{,}164\%$$

Ejemplo 3.9

Una persona realiza el descuento bancario, 60 días antes de la fecha de vencimiento, de una letra de cambio, suscrita a 210 días de plazo por valor de $100000, con una tasa de descuento del 12% anual. El mismo día el banco redescuenta el documento en el Banco Central a una tas del 9%, Calcular cuánto recibe el deudor y cuanto recibe el Banco que redescuenta.

Solución:

a) M = 100000

d = 0,12 anual

t = 60 días = 60/360 = 1/6 años

$$Cb = M\,(1 - d \cdot t)$$

$$Cb = 100000\left(1 - 0{,}12 \cdot \frac{1}{6}\right)$$

$$Cb = 98000\,\$$$

El deudor recibe $98000

b) M = 100000

d = 0,09 anual

t = 60 días = 60/360 = 1/6 años

Cb = M(1 – d·t)

Cb=100000(1-0,09·1/6)

Cb=98500$

El banco que redescuenta recibe $98500

Es decir el Banco tiene una utilidad de 500 dólares en la operación.

3.6. Problemas propuestos

1. ¿Cuál es el descuento racional de una letra de cambio de $10000, suscrita el día de hoy a 210 días de plazo y al 1,8% mensual, si se descontó 60 días antes de su vencimiento al 1,9% mensual?

2. Una persona solicita un préstamo de $ 10000 en un banco a 180 días de plazo, Calcular el valor efectivo que recibe y el descuento bancario que le hace, si el banco aplica una tasa de descuento del 16% anual.

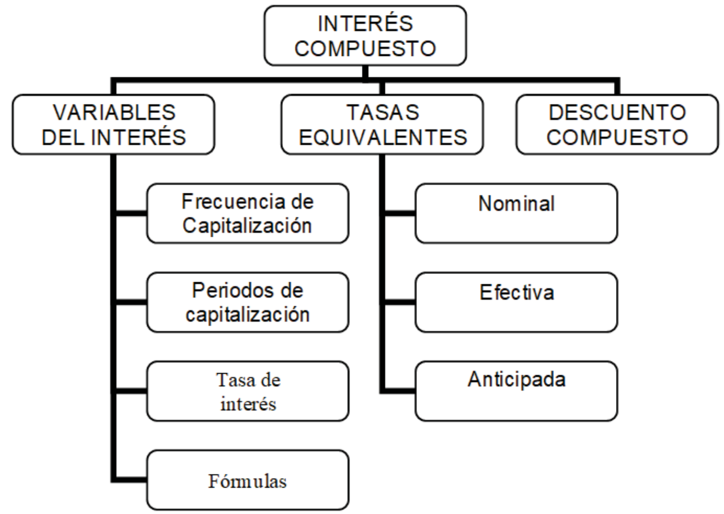
3. Una letra de cambio de $60000 suscrita el primero de junio a 180 días de plazo, al 1% de interés mensual desde su suscripción, se descuenta en un banco al 1,5% mensual, 90 días antes de su vencimiento. Calcular el descuento bancario y el valor efectivo.

4. ¿Cuánto dinero debe solicitar el cliente de un banco, a una tasa de descuento del 15% anual, si requiere $21000 pagaderos en 210 días de plazo?

CAPÍTULO IV

INTERÉS COMPUESTO

El capítulo cuatro se ha dedicado al estudio de los conceptos y factores que intervienen en el cálculo del Interés Compuesto y sus aplicaciones en operaciones financieras.



Se tiene Interés Compuesto, cuando el interés generado en un período se adiciona al capital original formando un nuevo capital (capitalización), el mismo que es utilizado para el cálculo del interés del nuevo período, continuando con este procedimiento hasta la terminación del plazo. La adición de los intereses al capital se lo hace en los denominados periodos de capitalización, que pueden ser anuales, semestrales, trimestrales, entre otros, y que se los establece en forma previa.

El interés compuesto se utiliza en convenios financieros generalmente superiores a un año, principalmente en los préstamos para adquisiciones de capital (edificios, maquinaria…) y en los depósitos en los bancos, cooperativas, mutualistas, etc. Las instituciones financieras intervienen en los dos tipos de operaciones: por una parte utilizan los depósitos para hacer préstamos a personas individuales y a empresas obteniendo un beneficio en esa operación; mientras los ahorristas ganan intereses, es decir lo que están haciendo es invertir su dinero.

Variables del interés Compuesto

El número de veces que el interés se convierte en capital en un año se conoce como.

4.1. Frecuencia de conversión o capitalización (f).

El periodo de tiempo entre dos conversiones sucesivas se conoce como periodo de conversión o capitalización.

4.2. Periodos de capitalización (n)

Este periodo puede ser anual, semestral, trimestral, etc. Y se calcula como:

n=número de años·frecuencia

4.3. Tasa de interés (i)

La tasa de interés por periodo de capitalización significa la tasa diaria, mensual, bimestral, etc. Dependiendo si

la capitalización es diaria, mensual, bimestral, etc. Y se calcula como

$$i = \frac{tasa\ anual}{frecuencia}$$

Fórmula del monto a interés compuesto.

El monto de un capital a interés compuesto es el valor del capital final o capital acumulado después de sucesivas acumulaciones de los intereses

A la diferencia entre el monto compuesto y el capital se lo conoce como interés compuesto.

$$M=C(1+i)^n$$

Ejemplo 4.1

Calcular el número de periodos de capitalización y la tasa de interés por periodo de capitalización de un capital colocado a interés compuesto durante 7 años, con una tasa de interés de 15% anual capitalizable semestralmente..

$$I=M-C$$

Solución:

Frecuencia = Número de veces que el interés se convierte en capital en un año, como es semestral el año tiene dos semestres, entonces:

f=2

Número de periodos: n=número de años·frecuencia

n=7 años·2

n=14 periodos

Tasa de interés por periodo: $i = \frac{tasa\ anual}{frecuencia}$

$$i = \frac{0{,}15}{2}$$

i=0,075

Ejemplo 4.2

Calcular el número de periodos de capitalización (n) y la tasa de interés por periodo de capitalización (i) de un capital colocado a interés compuesto durante 5 años a una tasa de interés de 15% anual capitalizable trimestralmente.

Solución:

f = 4 (por ser trimestral el año tiene 4 trimestres)

n=número de años·frecuencia

n=5 años·4

n=20 periodos

$$i = \frac{tasa\ anual}{frecuencia}$$

$$i = \frac{0{,}15}{4}$$

i=0,0375 trimestral

Ejemplo 4.3

Una cierta cantidad es invertida por 6 años, 7 meses, al 6% convertible mensualmente. Hallar la tasa de interés i por periodo de conversión, y el número de periodos n.

Solución:

f = 12 (por ser convertible mensualmente)

n=número de años·frecuencia

n=6 años·12+7

n=79 periodos

$$i = \frac{tasa\ anual}{frecuencia}$$

$$i = \frac{0{,}06}{12}$$

i=0,005 mensualmente

Ejemplo 4.4

X obtiene un préstamo de $6000, acordando en pagar el capital con intereses de 6% convertible semestralmente. ¿Cuánto debe al final de 4 años?

Solución:

C = 6000

f = 2

n = 4(2) = 8 periodos

i = 0,06/2 = 0,03 semestral

$M=C(1+i)^n$

$M=6000(1+0{,}03)^8$

M=7600,62$ es el valor que debe

Ejemplo 4.5

Seis años después de que X abrió una cuenta de ahorros con $2500 ganando intereses al 2,5% anual convertible semestralmente, la tasa de interés fue elevada al 3% convertible semestralmente. ¿Cuánto había en la cuenta 10 años después del cambio de la tasa de interés?

Solución:

En los primeros seis años:

C = 2500

f = 2

n = 6(2) = 12

i = 0,025/2 = 0,0125

$M=C(1+i)^n$

$M=2500(1+0{,}0125)^{12}$

M= 2901,89$

En los siguientes 10 años

C = 2901,89

f = 2

n = 10(2) = 20

i = 0,03/2 = 0,015

$M=C(1+i)^n$

$M=2901{,}89(1+0{,}015)^{20}$

M=3908,42$

Ejemplo 4.6

Acumular $20000 por 6 años al 12,4%, convertible trimestralmente.

Solución:

C = 20000

f = 4

n = 6(4) = 24

i = 0,124/4 =0,031

$M=C(1+i)^n$

$M=20000(1+0,031)^{24}$

M=41613,86$

Fórmula de monto para capitalizaciones continúas

Ejemplo 4.7

Calcular el monto de un capital de $200000 a interés compuesto durante 5 años, si la tasa de interés es 12% anual con capitalización continua.

Solución:

C = 200000

j = 0,12

t = 5 años

$M=C\cdot e^{(j\cdot t)}$

$M=200000(2,718281)^{(0,12\cdot 5)}$

M=364423,69$

Ejemplo 4.8

Calcular el valor actual de un pagaré cuyo valor al vencimiento, al final de 4 años es de $35000 considerando una tasa de interés de 12% anual capitalizable semestralmente.

Solución:

M = 35000

f = 2

n = 4 (2) = 8

i = 0,12/2 = 0,06

$$M = C(1+i)^n$$

$$C = \frac{M}{(1+i)^n} \; o \;\; C = M(1+i)^{-n}$$

$$C = \frac{35000}{(1+0,06)^8}$$

$$C = 21959,43\$$$

Ejemplo 4.9

Calcular el valor actual de un documento cuyo valor nominal es de $50000 a 6 años de plazo con 12% de interés anual capitalizable semestralmente desde su suscripción, si se vende 2 años antes de la fecha de vencimiento, considerando una tasa de 14% anual capitalizable semestralmente.

Solución:

Primero se debe encontrar el monto a 6 años

C = 50000

f = 2

n = 6 (2) = 12

i = 0,12/2 = 0,06

Luego se calcula el valor actual 2 años antes del vencimiento

M = 100609,82

f = 2

n = 2(2) = 4

i = 0,14/2 = 0,07

$$C = \frac{M}{(1+i)^n} \qquad o \qquad C = M(1+i)^{-n}$$

$$C = \frac{100609,82}{(1+0,07)^4}$$

$$C = 76754,75\$$$

Monto compuesto con periodos de interés fraccionarios

Cuando el tiempo de pago no coincide con el periodo de capitalización, dos métodos para el cálculo de los periodos de capitalización fraccionaria.

a) El matemático, que toma el valor exacto de n en la fórmula del monto compuesto

b) El comercial que aplica la parte entera de n en la fórmula del monto compuesto, y la parte fraccionaria en el monto de interés simple $M=C(1+i)^n (1+it)$

Ejemplo 4.10

Calcular por los dos métodos, el matemático y el comercial, el monto compuesto de $20000 a 7 años 8 meses de plazo, a 18% anual capitalizable trimestralmente.

Solución:

Método matemático

C = 20000

f = 4

i = 0,18/4 = 0,045

t = 7 años 8 meses = $7+\frac{8}{12}=7+\frac{2}{3}=\frac{23}{3}\,años$

n = $\frac{23}{3}\cdot 4=\frac{92}{3}$

$$M=C(1+i)^n$$

$$M=20000(1+0{,}045)^{\frac{92}{3}}$$

$$M=77137{,}03\ \$$$

Método comercial

C= 20000

f = 4

i = 0,18/4 = 0,045

t = 7 años 8 meses =**Ejemplo 4.11**

t = 7 años 8 meses = $7+\frac{8}{12}=7+\frac{2}{3}=\frac{23}{3}\,años$

n = $\frac{23}{3}\cdot 4=\frac{92}{3}=30+\frac{2}{3}$

$$M=C(1+i)^n(1+it)$$

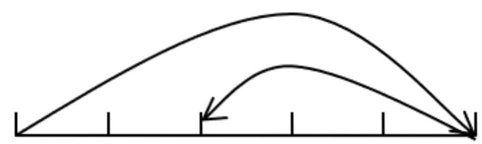
$$M=20000(1+0{,}045)^{30}\left(1+0{,}045\cdot\frac{2}{3}\right)$$

$$M=77153{,}55\ \$$$

Después de dos años de la fecha de suscripción se negocia un documento de $30000 con vencimiento en 5 años, con una tasa de interés del 21% anual capitalizable semestralmente desde la suscripción, calcular su valor actual o precio con una tasa del 18% anual capitalizable trimestralmente.

Solución:

Trazamos un gráfico de tiempo y valores



0 1 2 3 4 5

C= M=

Primero se calcula monto

C = 30000

f = 2

n = 5(2) = 10

i = 0,21/2 = 0,105

$M=C(1+i)^n$

$M=30000(1+0,105)^{10}$

M=81422,43$

Luego se calcula el valor actual en la fecha de negociación

M =81422,43

f = 4

i = 0,18/4 = 0,045

n = 3(4) = 12

$$C=\frac{M}{(1+i)^n}$$

$$C=\frac{81422,43}{(1+0,045)^{12}}$$

$$C=48011,86\$$$

Ejemplo 4.12

El valor de una letra será de $34000 al final de 7 años, calcular su valor actual luego de transcurridos 3 años y 4 meses de la fecha de suscripción considerando una tasa de interés de 14% capitalizable semestralmente.

Solución:

Por la forma matemática

M = 34000

f = 2

i = 0,14/2 = 0,07

t = como ha transcurrido 3 años 4 meses falta para completar 7 años 3 años 8 meses

$$3+\frac{8}{12}=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$$

$$n=\left(\frac{11}{3}\right)\cdot 2=\frac{22}{3}$$

$$C=\frac{M}{(1+i)^n}$$

$$C=\frac{34000}{(1+0,07)^{\frac{22}{3}}}$$

$$C=20701,31\$$$

Por la forma práctica o comercial

M = 34000

f = 2

i = 0,14/2 = 0,07

t = como ha transcurrido 3 años 4 meses falta para completar 7 años 3 años 8 meses =

$$3+\frac{8}{12}=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$$

n = $\left(\frac{11}{3}\right)\cdot 2=\frac{22}{3}=7+\frac{1}{3}$ entonces n=7 y una fracción 1/3

$$M=C(1+i)^n(1+it)$$

$$C=\frac{M}{(1+i)^7(1+it)}$$

$$C=\frac{34000}{(1+0{,}07)^7\left(1+0{,}07\cdot\frac{1}{3}\right)}$$

$$C=20690{,}71\$$$

Ejemplo 4.13

¿En qué tiempo expresado en años meses y días, un capital de $10000 se convertirá en $15000 a una tasa de interés del 18% anual convertible semestralmente?

Solución:

C = 10000

M = 15000

f = 2

n = # años · frecuencia

i = 0,18/2 = 0,09

$$M=C(1+i)^n$$

$$15000=10000(1+0{,}09)^n$$

$$\frac{15000}{10000}=(1{,}09)^n$$

$$1{,}5=1{,}09^n$$

$$log\,1\,,5=n\cdot log\,1\,,09$$

$$n=\frac{log\,1\,,5}{log\,1\,,09}$$

$n=4{,}704989$ Semestres

$$número años\cdot 2=4{,}704989$$

$$número\ de\ años=2{,}3524945$$

1 año	360 días
0,3524945	X = 126,90 días

Tiempo = 2 años 4 meses 7 días

4.4. Tasas equivalentes

La **Tasa nominal** es aquella que puede ser capitalizable varias veces en un año y se denomina (j)

La **Tasa efectiva** es la que actúa sobre el capital una vez al año y se denomina (i)

Se dice que las tasas de interés con diferentes periodos de conversión son equivalentes si producen el mismo interés compuesto al final de un año. La tasa de interés nominal y efectiva son equivalentes cuando producen la misma cantidad de dinero al final de un año.

$$1+i=\left(1+\frac{j}{f}\right)^{f} \quad \text{o} \quad \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}=\left(1+\frac{j}{f}\right)^{f}$$

Ejemplo 4.14

¿A qué tasa anual capitalizable trimestralmente, se convertirá un capital de $40000 en ¾ veces más en 5 años?

Solución:

C = 40000

M = 40000+3/4(40000) = 70000

f = 4

n = 5 (4) = 20

i = j/4

$$M = C(1+i)^n$$

$$70000 = 40000\left(1+\frac{j}{4}\right)^{20}$$

$$\frac{70000}{40000} = \left(1+\frac{j}{4}\right)^{20}$$

$$1{,}75 = \left(1+\frac{j}{4}\right)^{20}$$

$$\sqrt[20]{1{,}75} = 1+\frac{j}{4}$$

$$1{,}0283759 - 1 = \frac{j}{4}$$

$$(0{,}0283759)4 = j$$

$$j = 0{,}113504$$

$$j = 11{,}3504\%$$

Es la tasa nominal anual convertible Trimestralmente

Ejemplo 4.15

¿A qué tasa efectiva de interés equivale una tasa nominal de 18% anual capitalizable trimestralmente?

Solución:

i =

j = 0,18

f = 4

$$1+i=\left(1+\frac{j}{f}\right)^{f}$$

$$1+i=\left(1+\frac{0{,}18}{4}\right)^{4}$$

$$1+i=1{,}19252$$

$$i=1{,}19252-1$$

$$i=0{,}19252$$

$$i=19{,}252\%$$

Una tasa nominal de 18% anual capitalizable trimestralmente es equivalente a la tasa efectiva de 19,252% puesto que producen el mismo monto en tiempos iguales.

Ejemplo 4.16

¿A qué tasa nominal capitalizable semestralmente es equivalente a la tasa efectiva de 16%?

Solución:

j =

f = 2

i = 0,16

$$1+i=\left(1+\frac{j}{f}\right)^{f}$$

$$1+0{,}16=\left(1+\frac{j}{2}\right)^{2}$$

$$1{,}16=\left(1+\frac{j}{2}\right)^{2}$$

$$\sqrt[2]{1{,}16}=1+\frac{j}{2}$$

$$1{,}077033-1=\frac{j}{2}$$

$$(0{,}077033)2=j$$

$$j=0{,}154066$$

$$j=15{,}4066\%$$

Ejemplo 4.17

Hallar la tasa nominal convertible mensualmente equivalente al 5% convertible semestralmente

Solución:

j =

f = 12

i = 0,05

m = 2

$$\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}=\left(1+\frac{j}{f}\right)^{f}$$

$$\left(1+\frac{0,05}{2}\right)^{2}=\left(1+\frac{j}{12}\right)^{12}$$

Simplificando exponentes tenemos:

$$(1+0,025)=\left(1+\frac{j}{12}\right)^{6}$$

$$1,025=\left(1+\frac{j}{12}\right)^{6}$$

$$\sqrt[6]{1,025}=1+\frac{j}{12}$$

$$1,00412392-1=\frac{j}{12}$$

$$(0,00412392)12=j$$

$$j=0,049487$$

$$j=4,949\%$$

Tasa de interés anticipada

La tasa de interés anticipa es aquella que permite pagar o cobrar los intereses por adelantado:

$$1+i=\left(1-\frac{d}{f}\right)^{-f}$$

En donde;

i = tasa de interés efectiva

d = tasa de descuento

f = frecuencia

Ejemplo 4.18

¿A qué tasa de interés efectiva anticipada es equivalente a una tasa anticipada de 18% anual capitalizable cuatrimestralmente?

Solución:

i =

d = 0,18

f = 3

$$1+i=\left(1-\frac{d}{f}\right)^{-f}$$

$$1+i=\left(1-\frac{0{,}18}{3}\right)^{-3}$$

$$1+i=(0{,}94)^{-3}$$

$$1+i=1{,}20397$$

$$i=1{,}20397-1$$

$$i=0{,}20397$$

$$i=20{,}397\,\%$$

4.5. Descuento compuesto

El descuento compuesto al igual que el descuento simple es la diferencia entre el monto y el valor actual de un documento, deuda, etc.

El descuento compuesto puede calcularse de dos maneras:

El descuento compuesto matemático, que es el más

utilizado, su fórmula se basa en el descuento simple:

$Dc=M-C$

$Dc=M-M(1+i)^{-n}$

$Dc=M[1-(1+i)^{-n}]$

El descuento compuesto o bancario que se calcula sobre el monto de la deuda, es decir el monto menos el valor efectivo a interés compuesto (Cbc)

Por comparación del valor efectivo a interés compuesto tendríamos:

$Cb=M(1-dt)$ $\quad$ $Cbc=M(1-d)^{n}$

$Dbc=M-M(1-d)^{n}$

$Dbc=M[1-(1-d)^{n}]$

Ejemplo 4.19

Calcular el descuento compuesto de un documento cuyo monto será \$90000 luego de 10 años, si se descontó 3 años antes de su vencimiento a una tasa de interés de 15% efectiva

Solución:

Descuento compuesto matemático

M = 90000

f = 1

$n = 3$

$i = 0,15$

$Dc=M[1-(1+i)^{-n}]$

$Dc=90000[1-(1+0,15)^{-3}]$

$Dc=90000(0,342484)$

$Dc=30823,54\$$

Descuento compuesto bancario:

$M = 90000$

$f = 1$

$n = 3$

$d = 0,15$

$Dbc=M[1-(1-d)^{n}]$

$Dbc=90000[1-(1-0,15)^{3}]$

$Dbc=90000(0,385875)$

$Dbc=34728,75\$$

Como se puede notar el descuento bancario compuesto es mayor, con una diferencia notable; por eso casi no se utiliza.

4.6. Problemas propuestos

1. Hallar el monto compuesto de \$ 15000 por 7 años 8 meses, al 15% convertible mensualmente.

2. Una empresa obtiene un préstamo de \$ 40000 a 10 años de plazo con una tasa de interés de 15% capitalizable semestralmente. Calcular el interés y el monto que debe pagar a la fecha de vencimiento.

3. ¿A que tasa anual capitalizable trimestralmente equivale una tasa efectiva de 19,2519%?

4. ¿Cuántos años se necesitarán para que \$1500 aumenten al doble al 6% convertible trimestralmente?

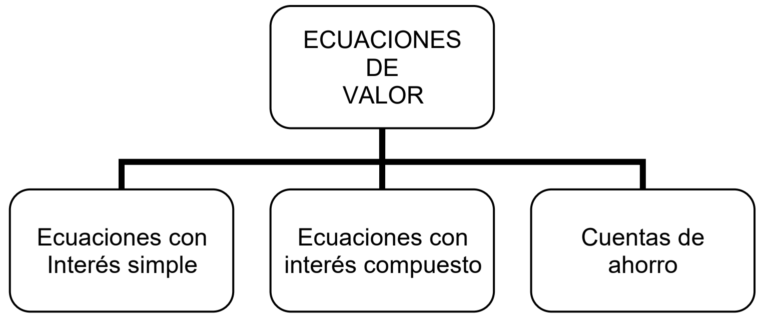
5. Hallar el valor presente de \$4000 pagaderos en 5 años 4 meses al 6% convertible trimestralmente. (Por la forma matemática y comercial)

6. Un documento de \$10000 suscrita el día de hoy a 5 años y 6 meses plazo, es negociado luego de transcurrido 2 años y 3 meses de la fecha de suscripción, con una tasa de interés de 18% anual capitalizable trimestralmente, calcular su valor actual a la fecha de negociación.

CAPÍTULO V

ECUACIONES DE VALOR Y CUENTAS DE AHORRO

La unidad cinco se dedica ha establecer ecuaciones de orden práctico en los cuales se pueda cambiar las fechas de pago y los montos de deudas ya contraídas.



Su aplicación práctica se da cuando se necesita negociar un conjunto de obligaciones y establecer nuevas formas de pago y fechas de vencimiento, inclusive con distintas tasas de interés, Tomando en consideración una fecha común llamada **fecha focal.** Relacionando los valores y fechas con la fecha focal, se obtiene la ecuación de valor que permite igualar el conjunto de obligaciones iniciales con el conjunto de nuevas obligaciones

Su formulación y planteamiento requiere de conocimientos de matemáticas generales y ejercicios prácticos abundantes.

5.1. Ecuaciones de valor con interés simple

Ejemplo 5.1

Una empresa tiene las siguientes obligaciones o deudas

M_1 = \$5000 a 60 días de plazo

M_2 = \$7000 a 120 días plazo

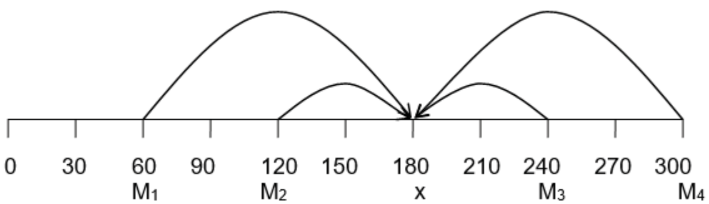
M_3 = \$10000 a 240 días plazo

M_4 = \$12000 a 300 días plazo

La empresa desea reemplazar sus obligaciones por un solo pago a 180 días plazo, considerando una tasa de interés del 18% anual. Calcular el valor del pago único.

Solución:

Expresamos el problema gráficamente



El tiempo se calcula solo el tiempo que se mueven los montos, si es a la derecha se halla un nuevo monto pero si es a la izquierda se halla capital

t_1=180-60=120días = 120/360 =1/3 años

t_2=180-120=60días = 60/360 = 1/6 años

t_3=240-180=60días = 60/360 = 1/6 años

t_4=300-180=120días = 120/360 = 1/3 años

i = 0,18 anual

La ecuación de valor estaría planteada como;

$$X = M_1(1+i\cdot t_1) + M_2(1+i\cdot t_2) + \frac{M_3}{(1+i\cdot t_3)} + \frac{M_4}{(1+i\cdot t_4)}$$

$$X = 5000\left(1+0{,}18\cdot\frac{1}{3}\right) + 7000\left(1+0{,}18\cdot\frac{1}{6}\right) + \frac{10000}{\left(1+0{,}18\cdot\frac{1}{6}\right)} + \frac{12000}{\left(1+0{,}18\cdot\frac{1}{3}\right)}$$

$$X = 5300 + 7210 + 9708{,}74 + 11320{,}75$$

$$X = 33539{,}49 \ \$$$

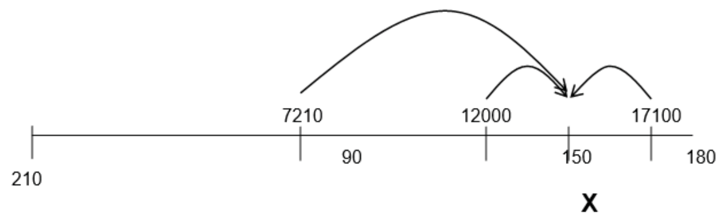
Ejemplo 5.2

Una empresa tiene tres deudas; la primera de \$7000 con vencimiento en 90 días al 1% mensual; la segunda de \$12000 con vencimiento en 150 días sin intereses; y la tercera de \$15000 con vencimiento a 210 días de plazo y al 2% mensual; la empresa desea reemplazar las tres deudas por una sola con vencimiento en 6 meses a 18% de interés anual. Calcular el valor del nuevo documento.

Solución:

En la gráfica las deudas con intereses se deben hallar los montos respectivos, pero si no tiene intereses se ubica directamente.

C = 7000	C = 15000
i = 0, 01 mensual	i = 0,02 mensual
t = 90 días = 3 meses	t = 210 días = 7 meses
M=C(1+i·t)	M=C(1+i·t)
M=7000(1+0,01·3)	M=15000(1+0,02·7)
M=7210	M=17100



i = 0,18 anual

t_1 = 180-90 = 90 días = 90/360 =1/4 años

t_2 = 180-150 = 30 días = 30/360 = 1/12 años

t_3 = 210 -180 = 30 días = 30/360 = 1/12 años

la ecuación será:

$$X = 7210\left(1+0{,}18\cdot\frac{1}{4}\right)+12000\left(1+0{,}18\cdot\frac{1}{12}\right)+\frac{17100}{\left(1+0{,}18\cdot\frac{1}{12}\right)}$$

$$X = 7534{,}45 + 12180 + 16847{,}29$$

$$X = 36561{,}74\ \$$$

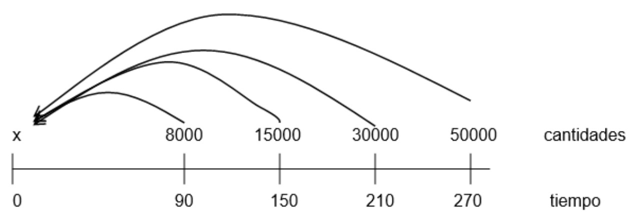
Ejemplo 5.3

Una empresa tiene las siguientes deudas; $8000 a 90 días de plazo; $15000 a 150 días de plazo; $30000 a 210 días de plazo; y $50000 a 270 días de plazo; la empresa desea reemplazar sus deudas por una sola con vencimiento el día de hoy; si se considera que la operación se realizará con una tasa de descuento de 12% anual, calcular el valor de la deuda el día de hoy.

Solución:

La fecha focal está el día de hoy, se debe hallar valores presentes de las diferentes deudas, el gráfico de tiempos y

valor es:



d = 0,12 anual

t_1 = 90 días = 90/360 =1/4 años

t_2 = 150 días = 150/360 = 5/12 años

t_3 = 210 días = 210/360 = 7/12 años

t_3 = 270 días = 270/360 = ¾ años

La ecuación será:

$$X = M_1(1-d\cdot t_1)+M_2(1-i\cdot t_2)+M_3(1-d\cdot t_3)+M_4(1-d\cdot t_4)$$

$$X = 8000\left(1-0{,}12\cdot\frac{1}{4}\right)+15000\left(1-0{,}12\cdot\frac{5}{12}\right)+30000\left[1-0{,}12\cdot\frac{7}{12}\right]+50000\left(1-0{,}12\cdot\frac{3}{4}\right)$$

$$X = 7760+14250+27900+45500$$

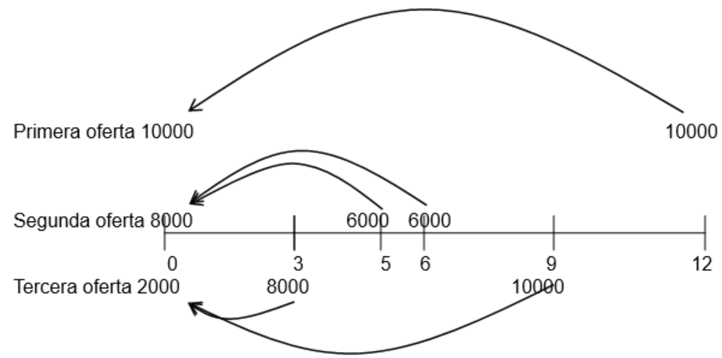
$X = 95410\$$ valor del nuevo documento

Ejemplo 5.4

El propietario de un terreno recibe tres ofertas para la venta; la primera \$ 10000 al contado y \$10000 a un año plazo; la segunda \$8000 al contado y dos letras de \$6000 a 5 y 6 meses plazo respectivamente; y la tercera \$2000 al contado, una letra de \$8000 a tres meses de plazo y otra letra de \$10000 a 9 meses plazo. ¿Cuál de las tres ofertas le conviene aceptar, si se considera una tasa de interés de 2% mensual?

Solución:

Para poder comparar cual oferta es la mejor se debe escribir cada oferta el día de hoy como si fuese de contado cada una de ellas, es decir utilizar la fecha focal el día de hoy para todas las ofertas.



Ecuaciones de valor:

Primera oferta

$$X = 10000 + \frac{10000}{(1+0{,}02\cdot(12))}$$

$$X = 10000 + 8064{,}52$$

$$X = 18064{,}52\$$$

Segunda oferta

$$X = 8000 + \frac{6000}{[1+0{,}02\cdot(5)]} + \frac{6000}{[1+0{,}02\cdot(6)]}$$

$$X = 8000 + 5454{,}55 + 5357{,}14$$

$$X = 18811{,}69\$$$

Tercera oferta

$$x = 2000 + \frac{8000}{[1 + 0{,}02 \cdot (3)]} + \frac{10000}{[1 + 0{,}02 \cdot (9)]}$$

$$X = 2000 + 7547{,}17 + 8474{,}58$$

$$X = 18021{,}75\$$$

La segunda oferta es la más alta

5.2. Cuentas de ahorro

Es un servicio bancario mediante el cual una institución recibe dineros a titulo de ahorro y paga un interés comercial anual que es regido por leyes gubernamentales.

Para el cálculo de los intereses en las cuentas de ahorro se utiliza la fórmula del interés simple en cada periodo de capitalización, es decir cuando el interés se suma al capital. Regularmente para el cálculo se emplea el número de días exacto y el año comercial de 360 días o el de 365 días, si la liquidación es anual; o el primer semestre de cada año es 181 días y 184 días para el segundo semestre, algunas veces también se contabiliza desde el día que se deposita o retira el dinero.

Ejemplo 5.5

Una persona propietaria de una cuenta de ahorros realiza una serie de depósitos y retiros con los valores y fechas que se detallan a continuación; el 15 de enero depositó $10000 para abrir una cuenta de ahorros; el 10

de febrero depositó $ 5000; el 2 de marzo retiró $6000, el 3 de abril retiró $2000; el 30 de abril depositó $ 11000; el primero de junio retiró $ 3000; si la cuenta de ahorro gana una tasa de interés de 7% anual. ¿Cuál será el saldo de la cuenta a 30 de junio? Utilizar año comercial

Solución:

Para este ejemplo se utilizará únicamente una de las fechas extremas, calcularemos los tiempos hasta el 30 de junio que desea saber el saldo en la cuenta.

Enero	16					
Febrero	28	18				
Marzo	31	31	29			
Abril	30	30	30	27		
Mayo	31	31	31	31	31	
Junio	30	30	30	30	30	29
Total días	**166**	**140**	**120**	**88**	**61**	**29**

Primer depósito

$$I = 10000(0{,}07)\frac{166}{360} = 322{,}78\$$$

Segundo deposito

$$I = 5000(0{,}07)\frac{140}{360} = 136{,}11\$$$

Primer retiro

$$I = 6000(0{,}07)\frac{120}{360} = 140{,}00\$$$

Segundo retiro

$$I = 2000(0{,}07)\frac{88}{360} = 34{,}22\ \$$$

Tercer depósito

$$I = 11000(0{,}07)\frac{61}{360} = 130{,}47\ \$$$

Tercer retiro

$$I = 3000(0{,}07)\frac{29}{360}16{,}92\ \$$$

Fecha	Depósito	Retiro	saldo	interés	
mes-día				+	-
01-15	10000		10000	322,78	
02-10	5000		15000	136,11	
03-02		6000	9000		140
04-03		2000	7000		34,22
04-30	11000		18000	130,47	
06-01		3000	15000		16,92
Intereses a favor y en contra				589,36	191,14
Interese			398,22		
Saldo a 30 de junio			15398,22		

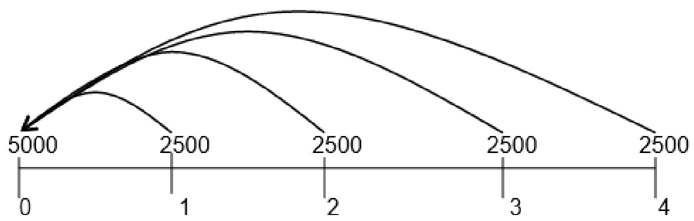
El saldo al 30 de junio es de 15398,22 dólares

5.3. Ecuaciones de valor con interés compuesto

Ejemplo 5.6

Un terreno es vendido por $5000 en efectivo y $2500anuales por los próximos 4 años. Suponiendo un rendimiento de 6% efectivo, hallar el precio de contado del terreno

Solución:



Ecuación de valor

$$X = 5000 + \frac{2500}{(1+0{,}06)^1} + \frac{2500}{(1+0{,}06)^2} + \frac{2500}{(1+0{,}06)^3} + \frac{2500}{(1+0{,}06)^4}$$

$$X = 5000 + 2358{,}49 + 2224{,}99 + 2099{,}05 + 1980{,}23$$

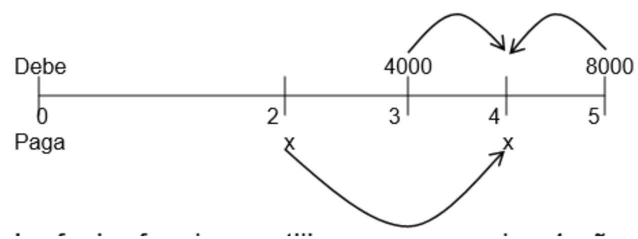
$$X = 13662{,}76\ \$$$

El terreno de contado sería de 13662,76 $

Ejemplo 5.7

Sustituir dos deudas de $4000 y $8000 con vencimiento en 3 y 5 años respectivamente, por dos pagos iguales con vencimiento en 2 y 4 años, suponiendo un rendimiento de 5% convertible semestralmente.

Solución:



La fecha focal que utilizaremos es a los 4 años

f = 2

i = 0,05/2 = 0,025 semestral

Ecuación de valor

Paga = Debe

$$x + x(1 + 0{,}025)^4 = 4000(1 + 0{,}025)^2 + \frac{8000}{(1 + 0{,}025)^2}x$$

$$+ 1{,}1038129x = 4202{,}5 + 7614{,}52$$

2,1038129x = 11817,02

$$x = \frac{11817{,}02}{2{,}1038129}$$

$$x = 5616{,}95\$$$

Los pagos iguales son de $5616,95 en 2 y 4 años

Ejemplo 5.8

Una empresa tiene las siguientes deudas: $1000 a 5 meses de plazo; $1500 a 10 meses de plazo; $ 2000 a 15 meses de plazo con una tasa de interés del 12% efectiva desde la suscripción; $3000 a 20 meses plazo; la empresa desea reemplazar todas sus deudas por 2 pagos iguales a 8 y 16 meses, a una tasa de interés de

16% anual capitalizable trimestralmente. Calcular el valor de dichos pagos.

Solución:

Primero calcularemos el monto de la tercera deuda por tener intereses

C = 2000

f = 1

i = 0,12 anual

n = 15/12 =5/4 años

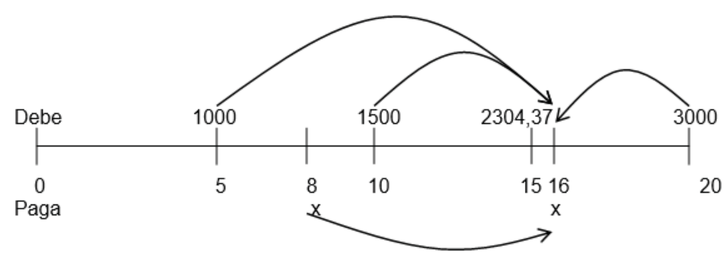
$M=C(1+i)^n$

$M=2000(1+0{,}12)^{5/4}$

M=2304,37$

La Fecha focal se lo realizará a los 16 meses

La gráfica de tiempo y valores será:



f = 4

i = 0,16/4 = 0,04

Ecuación de valor

Paga = Debe

$$x + x(1+0{,}04)^{8/3} = 1000(1+0{,}04)^{11/3} + 1500(1+0{,}04)^{2}$$

$$+ 2304{,}37(1+0{,}04)^{1/3} + \frac{3000}{(1+0{,}04)^{4/3}}$$

$$x + 1{,}110254x = 1154{,}66 + 1622{,}40 + 2334{,}69 + 2847{,}15$$

$$2{,}110254x = 7958{,}90$$

$$x = \frac{7958{,}90}{2{,}110254}$$

$$x = 3771{,}54\ \$$$

Los dos pagos iguales son de $3771,54 para liquidar la deuda

Tiempo Equivalente

La fecha en la cual un conjunto de obligaciones con fechas diferentes se puede liquidar mediante un pago único igual a la suma de las distintas deudas se denomina fecha de vencimiento promedio de las deudas. El tiempo que falta por transcurrir hasta dicha fecha se llama tiempo

equivalente.

La regla más frecuente para el cálculo del tiempo equivalente o tiempo de vencimiento promedio de dos o más deudas está regido por la siguiente fórmula:

$$Te = \frac{M_1t_1 + M_2t_2 + M_3t_3 + \ldots}{M_1 + M_2 + M_3 + \ldots}$$

Es decir es igual a la suma de los diferentes montos, multiplicados por sus tiempos de vencimiento, dividido por la suma de los respectivos montos, por cuanto lo que se calcula es un tiempo de vencimiento promedio

Adicionalmente en este capítulo se revisa el comportamiento de las libretas de ahorro.

Ejemplo 5.9

Encontrar el tiempo equivalente, o tiempo de vencimiento promedio, de las siguientes obligaciones; $1000 a un año de plazo; $2000 a 2 años y 6 meses de plazo; $3000 a 2 años y 9 meses de plazo.

Solución:

$$Te = \frac{M_1t_1 + M_2t_2 + M_3t_3 + \ldots}{M_1 + M_2 + M_3 + \ldots}$$

$$Te = \frac{1000(1) + 2000(2{,}5) + 3000(2{,}75)}{1000 + 2000 + 3000}$$

$$Te = \frac{14250}{6000}$$

$$Te = 2{,}375\ \textit{años}$$

1 año 360 días

0,375 X = 0,375(360) = 135 días

Te = 2 años 4 meses 15 días

5.4. Problemas propuestos

Ecuaciones de valor con interés simple

1. X debe $5000 con vencimiento en dos meses, $10000 con vencimiento en 5 meses y $ 15000 con vencimiento en 8 meses, se desea saldar sus deudas mediante dos pagos iguales, uno con vencimiento en 6 meses y otro con vencimiento en 10 meses. Determinar el importe de dichos pagos suponiendo un interés de 6%, tomando como fecha focal la fecha al final de 10 meses.

2. El señor Merchán es poseedor de una cuenta de ahorros que tiene un saldo de $12300 a 31 de diciembre y ha registrado durante el primer semestre del siguiente año las operaciones que se enumeran: el 3 de enero depositó $15500; el 15 de febrero retiró $3000; el 7 de abril depositó $12000; el 30 de mayo retiró $5500, si la tasa de interés es de 24% anual, ¿cuál será el saldo de la cuenta a 30 de junio? Tomar una de las fechas extremas y el año comercial para el cálculo de los intereses.

Ecuaciones de valor con interés compuesto

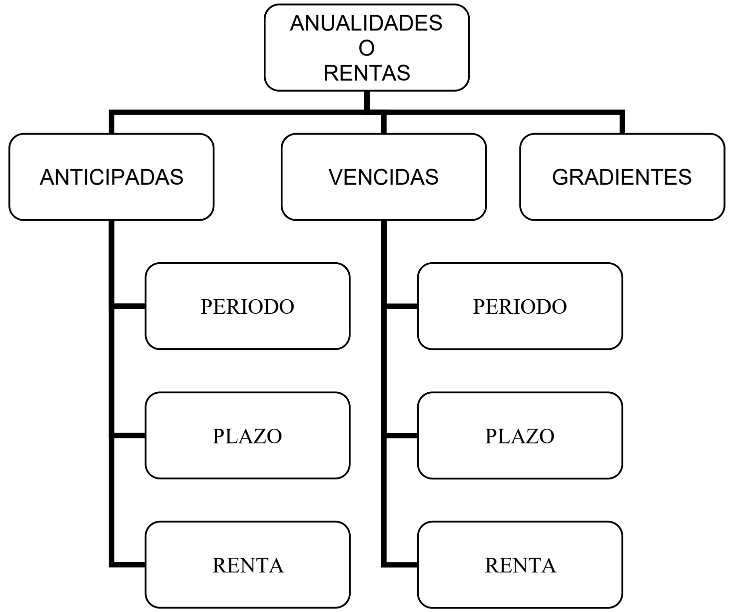
3. Suponiendo una tasa efectiva de 4%, ¿con qué pagos iguales X al final de un año y al final de 3 años es posible reemplazar las siguientes obligaciones; $2000 con vencimiento en 3 años sin intereses; y $4000 con intereses al 4% convertible semestralmente con vencimiento en 6 años? Utilizar la fecha focal a los 3 años.

4. Una empresa tiene las siguientes deudas: $10000 a 3 años de plazo con una tasa de 18% capitalizable semestralmente; $50000 a 4 años y 6 meses con una tasa de 12% efectiva; $30000 a 6 años 9 meses con una tasa de 15% anual capitalizable trimestralmente; la empresa desea reemplazar sus deudas por un solo pago en un tiempo equivalente para los tres vencimientos. Calcular la fecha de pago y el valor de pago único, considerando una tasa de interés de 14% anual capitalizable semestralmente.

CAPÍTULO VI

ANUALIDADES O RENTAS

En la Unidad seis analizaremos las Anualidades o Rentas tanto las anticipadas como las anualidades vencidas



La anualidad es una serie de pagos iguales realizados a intervalos regulares de tiempo, sean estos meses, trimestres, etc. Existen dos clases de anualidades que dependen de si el plazo es conocido o indefinido. En el primer caso se tiene las "Anualidades Ciertas" en las cuales se conoce en forma concreta la fecha de inicio y terminación, y en el segundo las "Anualidades Contingentes" en las cuales la fecha de inicio o de terminación dependen de algún suceso que no puede fijarse con anterioridad, tal es el caso de una póliza de seguro de vida que entra en vigencia con el fallecimiento del dueño de la misma, o en el caso de las jubilaciones que termina con la muerte del asegurado.

En este curso se estudiará fundamentalmente las **anualidades ciertas vencidas**, que se aplican cuando los pagos son iguales y se hacen al final de cada periodo. Se revisa también las **anualidades anticipadas** donde los pagos se hacen al inicio de cada período.

La utilización de las anualidades es diversa sobre todo en operaciones de endeudamiento y de formación de capitales, cuando es necesario preparar tablas de amortización como se verá en el siguiente capítulo.

Periodo de pago o periodo de la anualidad

Es el tiempo que se fija entre dos pagos sucesivos, puede ser diario, semanal, etc.

Tiempo o plazo de una anualidad

Es el intervalo de tiempo que transcurre entre el comienzo del primer periodo de pago y el final del último

Renta (R)

Es el valor del pago o depósito periódico

Renta Anual

Es la suma de los pagos o depósitos efectuados en un año.

6.1. Anualidades vencidas

$$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

En donde;

R = pago periódico o renta

i = tasa de interés por periodo de capitalización

j = tasa nominal anual

n = número de periodos de pago

S = monto de una anualidad

A = valor actual de una anualidad

6.2. Cálculo de la tasa de interés

El cálculo de la tasa de interés por periodo de pago se puede calcular partiendo de de la fórmula del monto o del valor actual. Se debe interpolar utilizando tablas o por interpolación dando diferentes valores a i

6.3. Anualidades anticipadas

$$S = R(1+i)\left[\frac{(1=i)^{n}-1}{i}\right] \qquad A = R(1+i)\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Ejemplo 6.1

En los últimos diez años, X ha depositado $500 al final de cada año en una cuenta de ahorro, la cual paga el 3,5% efectivo. ¿Cuánto había en la cuenta inmediatamente después de haber hecho el décimo depósito?

Solución:

Como realiza al final de cada año entonces se trata de una anualidad vencida, y en este ejercicio se debe hallar el monto de la anualidad por que se requiere saber al final de los 10 años

R = 500

f = 1

i = 0,035

n = 10

$$S = R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]$$

$$S = 500\left[\frac{(1+0{,}035)^{10}-1}{0{,}035}\right]$$

$$S = 5865{,}70\ \$$$

El señor X tiene en la cuenta de ahorros 5865,70 $ después de 10 depósitos.

Ejemplo 6.2

El día de hoy, M compra una anualidad de $2500 anuales durante 15 años, en una compañía de seguros que utiliza el 3% anual. Si el primer pago vence en un año. ¿Cuál fue el costo de la anualidad?

Solución:

Como el primer pago vence en un año se trata de una anualidad anticipada, por lo que se debe hallar capital ya que se requiere el valor de compra el día de hoy.

R = 2500

f = 1

i = 0,03

n = 15

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$A = 2500\left[\frac{1-(1+0.03)^{-15}}{0.03}\right]$$

$$A = 29849{,}84\ \$$$

Ejemplo 6.3

Una compañía de televisión tiene en oferta una máquina con \$20000 de cuota inicial y \$2500 mensuales por los próximos 12 meses, si se carga un interés del 9% convertible mensualmente. Hallar el valor de contado equivalente.

Solución:

Para saber el valor de contado se debe hallar capital y agregar la cuota inicial, cuando no se especifica si es anticipada o vencida la mensualidad, se debe utilizar siempre vencida.

R = 2500

f = 12

i = 0,09/12 = 0.0075

n = 12

$$C = cuotainicial + R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$C = 20000 + 2500\left[\frac{1-(1+0.0075)^{-12}}{0.0075}\right]$$

$$C = 20000 + 28587{,}28$$

$$C = 48587{,}28\$$$

La compañía deberá pagar de contado \$48587,28 incluido la cuota inicial.

Ejemplo 6.4

Calcular el valor del depósito mensual que debe hacer una persona en una institución financiera que paga 14,4% anual capitalizable mensualmente, a fin de obtener \$64000 en 6 años. Además calcular los intereses que gana.

Solución:

S = 64000

f = 12

i = 0,144/ 12 = 0,012

n = 6 (12) = 72

$$S = R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]$$

$$R = \frac{S \cdot i}{(1+i)^{n}-1}$$

$$R = \frac{64000(0{,}012)}{(1+0{,}012)^{72}-1}$$

R=564,51\$

I = 64000 – 564,51 (72)

I = 23355,28 $

La persona debe depositar $564,51 mensualmente durante los 72 meses obteniendo un interés de $ 23355,58

Ejemplo 6.5

¿Cuántos depósitos de $2500 debe hacer una persona cada trimestre para obtener $75000 considerando una tasa de interés de 15% anual capitalizable trimestralmente?

¿Con qué pago final coincidente con el último pago completo se cancelará la citada deuda?

¿Con qué pago adicional realizado un mes después del último pago completo se cancelará la deuda citada?

Solución:

S = 75000

R = 2500

f = 4

i = 0,15 / 4 = 0,0375

n =

$$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$75000 = 2500\left[\frac{(1+0{,}0375)^n - 1}{0{,}0375}\right]$$

$$\frac{75000}{2500} = \left[\frac{(1{,}0375)^n - 1}{0{,}0375}\right]$$

$$30(0{,}0375) = (1{,}0375)^n - 1$$

$$1{,}125 + 1 = (1{,}0375)^n$$

$$log\, 2{,}125 = n\, log\, 1{,}0375$$

$$n = 20{,}48 \rightleftarrows períodos$$

Se realiza 20 depósitos completos de $2500, y un depósito último menor

¿Con qué pago final coincidente con el último pago completo se cancelará la citada deuda?

Para este cálculo utilizaremos una ecuación de valor

$$75000 = 2500\left[\frac{(1+0{,}0375)^{20}-1}{0{,}0375}\right]+x$$

$$75000 = 72543{,}47 + x$$

$$x = 2456{,}53\,\$$$

Con un depósito de $2456,53 coincidente en el depósito 20 completara los $75000

¿Con qué pago adicional realizado un mes después del último pago completo se cancelará la deuda citada?

La ecuación de valor para este caso será similar a la anterior, tomando en cuenta que el Monto de las 20 anualidades ganará un período más.

$$75000 = 2500\left[\frac{(1+0{,}0375)^{20}-1}{0{,}0375}\right](1+0{,}0375)+x$$

$$75000 = 72543{,}47(1{,}0375) + x$$

$$75000 - 75263{,}85 = x$$

$$x = -263{,}85\,\$$$

Si esperamos que transcurra un trimestre no se deberá realizar un depósito adicional ya que con los intereses excede el monto requerido, la persona tendrá en el banco un adicional de $263,85.

Ejemplo 6.6

M desea acumular $7500 en un fondo que paga el 5% convertible semestralmente, haciendo depósitos semestrales de $250 cada uno.

a) ¿Cuántos depósitos completos deberá hacer?

b) ¿Qué depósito adicional hecho en la última fecha del último depósito completará los $7500?

c) ¿Qué depósito hecho 6 meses después del último depósito completo completará los $7500?

Solución:

S = 7500

R = 250

f = 2

i = 0,05 / 2 = 0,025

n =

$$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$7500 = 250\left[\frac{(1+0{,}025)^n - 1}{0{,}025}\right]$$

$$\frac{7500}{250} = \left[\frac{(1{,}025)^n - 1}{0{,}025}\right]$$

$$30(0{,}025) = (1{,}025)^n - 1$$

$$0{,}75 + 1 = (1{,}025)^n$$

$$\log 1{,}75 = n \log 1{,}025$$

$$n = 22{,}66\ períodos$$

Se realiza 22 depósitos completos de \$250, y un depósito adicional menor

¿Qué depósito adicional hecho en la última fecha del último depósito completará los \$7500?

Para este cálculo utilizaremos una ecuación de valor

$$7500 = 250\left[\frac{(1+0{,}025)^{22} - 1}{0{,}025}\right] + x$$

$$7500 = 7215{,}71 + x$$

$$x = 284{,}28\,\$$$

Con un depósito de \$284,28 coincidente en el depósito 22 completará los \$7500

¿Qué depósito hecho 6 meses después del último depósito completo completará los \$7500?

La ecuación de valor para este caso será similar a la anterior, tomando en cuenta que el Monto de las 22 anualidades ganará un período más.

$$7500 = 250\left[\frac{(1+0{,}025)^{22}-1}{0{,}025}\right](1+0{,}025)+x$$

$$7500 = 7215{,}71(1{,}025)+x$$

$$75000 - 7396{,}10 = x$$

$$x = 103{,}89\ \$$$

Si esperamos que transcurra un semestre se deberá realizar un depósito adicional de $103,89 para completar los $7500

Ejemplo 6.7

Como beneficiaria de una póliza de seguro de $10000, una viuda recibe $1000 inmediatamente y posteriormente $500 cada tres meses. Si la compañía paga intereses al 2% convertiblemente trimestralmente.

a) ¿Cuántos pagos completos de $500 recibirá

b) ¿Con qué suma adicional pagado con el último pago completo cesará el beneficio?

c) ¿Con qué suma pagada tres meses después del pago completo cesará el beneficio?

Solución:

A = 10000-1000 = 9000

R = 500

f = 4

i = 0.02 / 4 = 0,005

n =

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$9000 = 500\left[\frac{1-(1+0{,}005)^{-n}}{0{,}005}\right]$$

$$\frac{9000}{500} = \left[\frac{1-(1+0{,}005)^{-n}}{0{,}005}\right]$$

$$18(0{,}005) = 1-(1{,}005)^{-n}$$

$$0{,}09 - 1 = -1{,}005^{-n}$$

$$-0{,}91 = -1{,}005^{-n}|$$

$$\log 0{,}91 = -n \log 1{,}005$$

$$-n = -18{,}91\ períodos$$

Se realiza 18 pagos completos de $500, y un pago adicional menor

¿Con qué suma adicional pagado con el último pago completo cesará el beneficio?

Para este cálculo utilizaremos una ecuación de valor

$$9000 = 500\left[\frac{1-(1+0{,}005)^{-18}}{0{,}005}\right]+\frac{x}{(1+0{,}005)^{18}}$$

$$9000 = 8586{,}38+\frac{x}{(1{,}005)^{18}}$$

$$9000 - 8586{,}38 = \frac{x}{(1{,}005)^{18}}$$

$$413{,}62(1{,}005)^{18} = x$$

$$x = 452{,}47\$$$

El beneficio de la póliza de seguro se termina con los 18 pagos de $500 y un pago adicional coincidente con el último pago de $452,47

¿Con qué suma pagada tres meses después del pago completo cesará el beneficio?

La ecuación de valor es:

$$9000 = 500\left[\frac{1-(1+0{,}005)^{-18}}{0{,}005}\right]+\frac{x}{(1+0{,}005)^{19}}$$

$$9000 = 8586{,}38+\frac{x}{(1{,}005)^{19}}$$

$$9000 - 8586{,}38 = \frac{x}{(1{,}005)^{19}}$$

$$413{,}62(1{,}005)^{19} = x$$

$$x = 454{,}73\$$$

El beneficio de la póliza de seguro se termina con los 18 pagos de $500 y un pago adicional de $454,73 tres meses más tarde de pago completo.

Ejemplo 6.8

Un televisor puede ser comprado con $449,50 al contado o $49,50 de cuota inicial y $27,50 mensuales durante 18 meses. ¿Qué tasa nominal de interés se esta cargando?

Solución:

A = 449,50 – 49,50 = 400

R = 27,50

f = 12

i = j / 12

n = 18

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$\frac{A}{R} = \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$\frac{400}{27{,}50} = \left[\frac{1-(1+i)^{-18}}{i}\right]$$

$$14{,}5455 = \left[\frac{1-(1+i)^{-18}}{i}\right]$$

Se busca i para un valor mayor y menor de 14,5455 cuando n=18

Mayor	0,020	14,9920
	i	14,5455
Menor	0,025	14,3534

Para un resultado mas preciso podemos interpolar restando de la siguiente manera:

$$0{,}005\left[\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}0{,}020\\ i\end{array}\right] i-0{,}020\\ 0{,}025\end{array}\right. \qquad -0{,}6386\left[\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}14{,}9920\\ 14{,}5455\end{array}\right]-0{,}4465\\ 14{,}3534\end{array}\right.$$

La ecuación:

$$\frac{i-0{,}020}{-0{,}4465} = \frac{0{,}005}{-0{,}6386}$$

$$i-0{,}020 = \frac{0{,}005}{-0{,}6386}(-0{,}4465)$$

$$i = 0{,}020 + 0{,}0035$$

$$i = 0{,}0235$$

Como i= j /12 tenemos:

$$\frac{j}{12} = 0{,}0235$$

$j = 0{,}28195$ tanto por uno

$$J = 28195\%$$

Ejemplo 6.9

Una persona deposita al principio de cada trimestre $5000 a una tasa de interés del 12% anual capitalizable trimestralmente. ¿Cuánto habrá acumulado en 5 años?

Solución:

R = 5000

f = 4

i = 0,12 /4= 0,03

n = 5(4) = 20

$$S = R(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$S = 5000(1+0.03)\left[\frac{(1+0,03)^{20} - 1}{0,03}\right]$$

$$S = 138382,43\ \$$$

Ejemplo 6.10

Una persona realiza pagos al principio de cada mes por un valor de $1800 a una tasa de interés del 15% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuánto habrá pagado de capital en 7 años?

Solución:

R = 1800

f = 12

i = 0,15 /12= 0,0125

n = 7(12) = 84

$$A = R(1+i)\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$A = 1800(1+i)\left[\frac{1-(1+0,0125)^{-84}}{0,0125}\right]$$

$$A = 94445,93\ \$$$

6.4. Problemas propuestos

1. Hallar el valor efectivo equivalente a una anualidad de $100 al final de cada tres meses durante 15 años, suponiendo un interés del 5% convertible trimestralmente.

2. Una persona obtiene un préstamo de $40000 acuerda pagarlo con intereses al 4% convertible trimestralmente en pagos trimestrales de $3000 cada uno durante el tiempo necesario, si el primer pago lo hace tres meses después de recibido el dinero.

a) Determine el número necesario de pagos completos

b) Hallar el pago final que se hará en el último pago completo para liquidar la deuda

c) Hallar el pago final que se hará tres meses después del último pago completo para liquidar la deuda.

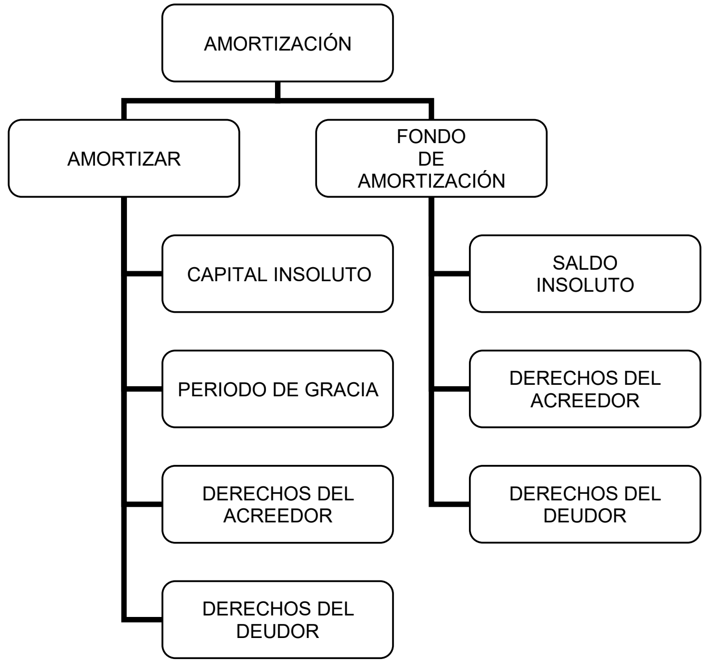
3. Una persona realiza pagos al principio de cada mes por un valor de $174 considerando una tasa de interés del 15% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuánto habrá pagado de capital en 10 años?

4. Una empresa desea acumular un fondo de $9000 para reposición de maquinaria, mediante depósitos trimestrales durante 7 años en una Institución financiera que reconoce una tasa de interés de 8% anual capitalizable trimestralmente. Calcular el valor del depósito trimestral.

CAPÍTULO VII

AMORTIZACIÓN DE OBLIGACIONES Y ACUMULACIÓN DE FONDOS

7.1. Cálculo de la cuota o Renta



Analizaremos ahora, en la unidad siete: Amortizaciones de deudas y preparación de fondos de amortización.

Son aplicaciones de las anualidades que permiten elaborar cuadros que detallan la forma como se cancelan las obligaciones y la manera de acumular capitales, mediante la aportación de cuotas periódicas en períodos determinados. Estas técnicas son muy utilizadas en todo el sistema financiero en operaciones de crédito a mediano y largo plazo y en la compra de bienes muebles e inmuebles; así como en la constitución de diversos fondos como el de jubilación.

Amortizar es el proceso de cancelar una deuda y sus intereses por medio de pagos periódicos.

7.2. Capital insoluto

Es la parte de la deuda no cubierta en una fecha dada se conoce también como saldo insoluto. El capital insoluto justamente después de que se a efectuado un pago, es el valor presente de todos los pagos que aun faltan por hacerse.

Cálculo del saldo insoluto

El capital insoluto puede calcularse para cualquier periodo utilizando la fórmula del valor actual

Sea P el saldo insoluto, m el número de cuotas pagadas, en el número total de cuotas, y k el número de cuotas que quedan por pagar. Entonces.

$$P = R\left[\frac{1-(1+i)^{-k}}{i}\right] \qquad k = n - m$$

Este es el capital insoluto en la tabla de m+1

7.3. Periodo de gracia:

Con frecuencia se realizan prestamos a largo plazo con la modalidad de amortización gradual, en que se incluyen un periodo sin que se paguen cuotas (generalmente solo se paga el interés) el cual se denomina periodo de gracia, con el propósito de permitirles a las empresas o instituciones operar libremente durante un tiempo y luego

cubrir las cuotas respectivas.

Derechos del acreedor y del deudor:

Cuando se adquiere un bien a largo plazo, o se está pagando una deuda por el sistema de amortización gradual, es común querer conocer que parte de la deuda está pagada en determinado tiempo, o también cuales son los derechos del acreedor (parte por pagar) o los derechos del deudor (parte pagada)

Derechos del acreedor + derechos del deudor = Deuda

DA + DD = DO

Saldo insoluto + parte amortizada = deuda original

7.4. Amortizaciones con reajuste de la tasa de interés:

En el mercado financiero es frecuente realizar préstamos a largo plazo con el sistema de amortización gradual en cuyas cláusulas se establece que la tasa de interés puede reajustarse cada cierto tiempo, de acuerdo con la fluctuación del mercado.

En este caso se necesita calcular el saldo insoluto luego de haber pagado la última cuota con la tasa anterior, luego calcular el valor de la cuota con la nueva tasa de interés y rehacer la tabla de amortización.

7.5 fondos de amortización

Un fondo de amortización es una cantidad que se va acumulando mediante depósitos periódicos que devengan cierto interés, de modo que en un número determinado de periodos se obtenga un monto prefijado

Los fondos de amortización son depósitos periódicos que se realizan con la finalidad de acumular un capital, este sistema se realiza para la reposición de activos fijos, crear fondos de reserva, pagar prestaciones futuras, seguros, etc.

El saldo insoluto en fondos de amortización:

En los fondos de valor futuro también se pueden calcular el denominado saldo insoluto, que en este caso es lo que queda por acumular para conseguir el monto prefijado, sin tener que elaborar toda la tabla

Saldo insoluto = Monto – valor acumulado

Saldo insoluto = $M - R\left[\frac{(1+i)^m - 1}{i}\right]$

Donde m = número de depósitos

Ejemplo 7.1

Una deuda de $5000 con intereses al 5% convertible semestralmente se amortiza mediante pagos semestrales iguales en los próximos 3 años, el primero con vencimiento a 6 meses. Hallar el valor del pago y construir la tabla de amortización.

Solución:

A = 5000

f = 2

i = 0.05/ 2 = 0,025

n = 3(2) = 6

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$R = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$R = \frac{5000(0{,}025)}{1-(1+0{,}025)^{-6}}$$

$$R = 907{,}75\$$$

Período	Capital Insoluto	Interés Vencido	Cuota o Pago	Capital pagado por cuota
1	5000,00	125,00	907,75	782,75
2	4217,25	105,43	907,75	802,32
3	3414,93	85,37	907,75	822,38
4	2592,55	64,81	907,75	842,94
5	1749,62	43,74	907,75	864,01
6	885,61	22,14	907,75	885,61
Total		**446,50**	**5446,50**	**5000,00**

La tabla se llena por renglones como sigue:

El capital insoluto al principio del primer período es la deuda original, el interés al final de ese mismo período es 5000(0,025)= 125, el Pago semestral es 907,75 como calculamos anteriormente, y el capital pagado es 907,75–125= 782,75, para el siguiente período el capital insoluto es 5000-782,75= 4217,25, este proceso se repite con cada uno de los períodos, para hallar todos los valores de la tabla.

Ejemplo 7.2

Calcular el valor de la cuota trimestral necesaria para amortizar una deuda de $7000 en 4 años considerando una tasa de interés anual de 15% capitalizable trimestralmente. Calcular la cuota trimestral y elaborar la tabla de amortización correspondiente.

Solución:

A = 7000

f = 4

i = 0,015/ 4 = 0,0375

n = 4(4) = 16

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$R = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$R = \frac{120000(0{,}015)}{1-(1+0{,}015)^{-180}}$$

$$R = 1932{,}51\$$$

Período	Capital Insoluto	Interés Vencido	Cuota o Pago	Capital pagado por cuota
1	7000,00	262,50	589,71	327,21
2	6672,79	250,23	589,71	339,48
3	6333,30	237,50	589,71	352,21
4	5981,09	224,29	589,71	365,42
5	5615,66	210,59	589,71	379,13
6	5236,54	196,37	589,71	393,34
7	4843,19	181,62	589,71	408,09
8	4435,10	166,32	589,71	423,40
9	4011,70	150,44	589,71	439,27
10	3572,43	133,97	589,71	455,75
11	3116,68	116,88	589,71	472,84
12	2643,84	99,14	589,71	490,57
13	2153,27	80,75	589,71	508,97
14	1644,31	61,66	589,71	528,05
15	1116,25	41,86	589,71	547,85
16	568,40	21,31	589,71	568,40
Total		**2435,42**	**9435,42**	**7000,00**

Ejemplo 7.3

Una persona adquiere una propiedad mediante un préstamo hipotecario de $120000 a 15 años plazo. Si desea pagar la deuda en cuotas iguales mensuales y se considera una tasa interés del 1,5% mensual. Calcular los derechos del acreedor y el deudor inmediatamente después de haber pagado la cuota 120 y reconstruir la tabla para los períodos 121,122 y 123.

Solución:

A = 120000

f = 12

i = 0,015

n = 15 (12) = 180

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$R = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$R = \frac{120000(0{,}015)}{1-(1+0{,}015)^{-180}}$$

$$R = 1932{,}51\$$$

Para calcular el saldo insoluto:

R= 1932,51

f = 12

i = 0,015

k = n-m = 180-120 = 60

$$P = R\left[\frac{1-(1+i)^{-k}}{i}\right]$$

$$P = 1932{,}51\left[\frac{1-(1+0{,}015)^{-60}}{0{,}015}\right]$$

$$P = 76102{,}76\$$$

Este saldo insoluto de $76102,76 de la cuota 121 es el derecho del acreedor y:

Saldo insoluto + Parte amortizada = Deuda

76102,76 + PA = 120000

PA = 120000 – 76102,76

PA = 43897,24

La parte amortizada de $43897,24 representa el derecho del deudor

Período	Capital Insoluto	Interés Vencido	Cuota o Pago	Capital pagado por cuota
121	76102,76	1141,54	1932,51	790,97
122	75311,79	1129,68	1932,51	802,83
123	74508,96	1117,63	1932,51	814,88

Ejemplo 7.4

Una compañía consigue un préstamo por un valor de $200000 a 10 años plazo incluidos dos de gracia, con una tasa de interés de 9,5% anual capitalizable semestralmente, para ser pagado mediante cuotas semestrales por el sistema de amortización gradual; la primera cuota deberá pagarse un semestre después del período de gracia. Calcular la cuota semestral y el saldo insoluto inmediatamente después de haber pagado la cuota 5 y realizar la distribución de cuota 6 y 7 a lo que respecta al capital e intereses.

Solución:

El período de pago es 10 – 2 = 8 años

A = 200000

f = 2

i = 0,095 / 2 = 0,0475

n = 8 (2) = 16

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$R = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$R = \frac{200000(0{,}0475)}{1-(1+0{,}0475)^{-16}}$$

$$R = 18187{,}06\$$$

Para calcular el saldo insoluto:

R= 18187,06

f = 2

i = 0,0475

k = n-m = 16-5 = 11

$$P = R\left[\frac{1-(1+i)^{-k}}{i}\right]$$

$$P = 18187{,}06\left[\frac{1-(1+0{,}0475)^{-11}}{0{,}0475}\right]$$

$$P = 153072{,}50\$$$

El saldo insoluto al inicio de la cuota 6 es de $153072,50

Período	Capital Insoluto	Interés Vencido	Cuota o Pago	Capital pagado por cuota
6	153072,50	7270,94	18187,06	10916,12
7	142156,38	6752,43	18187,06	11434,63

Ejemplo 7.5

Una empresa obtiene un préstamo de $50000 a 5 años de plazo con una tasa de interés de 18% anual capitalizable trimestralmente, que debe ser pagada por cuotas trimestrales por sistema de amortización gradual.

a) Calcular el valor de cuota trimestral

b) Construir la tabla de amortización en los períodos 1 y 2

c) Si la tasa de interés se reajusta a 24% anual capitalizable trimestralmente luego del pago 12, calcular la nueva trimestral y reconstruir la tabla en los períodos 13, 14 y 15.

Solución:

A = 50000

f = 4

i = 0,18 / 4 = 0,045

n = 5 (4) = 20

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$R = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$R = \frac{50000(0{,}045)}{1-(1+0{,}045)^{-20}}$$

$$R = 3843{,}81\$$$

Período	Capital Insoluto	Interés Vencido	Cuota o Pago	Capital pagado por cuota
1	50000,00	2250,00	3843,81	1593,81
2	48406,19	2178,28	3843,81	1665,53

Para reconstruir la tabla con los nuevos intereses se debe hallar el saldo insoluto luego de la cuota 12

R= 3843,81

f = 4

i = 0,045

k = n-m = 20 - 12 = 8

$$P = R\left[\frac{1-(1+i)^{-k}}{i}\right]$$

$$P = 3843{,}81\left[\frac{1-(1+0{,}045)^{-8}}{0{,}045}\right]$$

$$P = 25353{,}33\$$$

Este saldo insoluto constituye el capital no pagado, se debe hallar primero el valor de la nueva cuota con la nueva tasa.

A = 25353,33

f = 4

i = 0,24 / 4 = 0,06

n = 8

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$R = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$R = \frac{25353{,}33(0{,}06)}{1-(1+0{,}06)^{-8}}$$

$$R = 4082{,}80\$$$

Período	Capital Insoluto	Interés Vencido	Cuota o Pago	Capital pagado por cuota
13	25353,33	1521,20	4082,80	2561,60
14	22791,73	1367,50	4082,80	2715,30
15	20076,43	1204,59	4082,80	2878,21

Ejemplo 7.6

Una empresa desea acumular un capital de $6000 en tres años mediante depósitos semestrales en una institución financiera que le reconoce una tasa de interés de 14% capitalizable semestralmente. Calcular la cuota semestral y elaborar la tabla de amortización correspondiente.

Solución:

S = 6000

f = 2

i = 0,14 / 2 = 0,07

n = 3 (2) = 6

$$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$R = \frac{S \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

$$R = \frac{6000(0{,}07)}{(1+0{,}07)^6 - 1}$$

$$R = 838{,}77$$

Período	Depósito	Aumento de interés	Total aumentado al fondo	Fondo acumulado
1	838,77		838,77	838,77
2	838,77	58,71	897,49	1736,26
3	838,77	121,54	960,31	2696,58
4	838,77	188,76	1027,54	3724,11
5	838,77	260,69	1099,46	4823,57
6	838,77	337,65	1176,43	6000,00
Total	**5032,65**	**967,35**	**6000,00**	

Ejemplo 7.7

Una empresa desea acumular un capital de $70000 en 4 años, mediante depósitos semestrales iguales en una institución financiera que le reconoce una tasa de interés de 15% anual, capitalizable semestralmente. Calcular el valor del depósito semestral, el valor acumulado y el saldo insoluto al final del período 6.

Solución:

S = 70000

f = 2

i = 0,15 / 2 = 0,075

n = 4 (2) = 8

$$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$R = \frac{S \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

$$R = \frac{70000(0{,}075)}{(1+0{,}075)^8 - 1}$$

$$R = 6700{,}89\$$$

Para hallar el valor acumulado calculamos el monto para los 6 períodos.

R = 6700,89

f = 2

i = 0,15 / 2 = 0,075

n = 6

$$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

$$S = 6700{,}89\left[\frac{(1+0{,}075)^6 - 1}{0{,}075}\right]$$

$S = 48541{,}40\$$ Valor acumulado

Para calcular el saldo insoluto se utiliza la siguiente fórmula:

Saldo insoluto = $M - R\left[\frac{(1+i)^m - 1}{i}\right]$

$$SI = 70000 - 48541{,}40$$

$$SI = 21458{,}60\ \$$$

7.6. Problemas propuestos

1. Una empresa consiguió un préstamo de $60000 amortizable en pagos semestrales iguales en 4 años, con una tasa de interés del 9% anual capitalizable semestralmente. Calcular la cuota semestral y elaborar la tabla de amortización correspondiente.

2. Una empresa obtiene un préstamo de $98000 a 7 años de plazo, que debe ser pagado en cuotas trimestrales con una tasa de interés de 18% anual capitalizable trimestralmente. Calcular la renta y el saldo insoluto inmediatamente después de pagar la cuota 20, reconstruir la tabla para la cuota 21, 22 y 23.

3. Una persona adquiere una casa mediante el sistema de amortización gradual e hipoteca la propiedad a una institución financiera por un valor de $100000 a 30 años plazo, pagaderos en cuotas mensuales con un interés del 10% anual capitalizable mensualmente. Calcular el valor de cuota mensual y cuanto le queda por pagar después de la cuota 300 (derecho del acreedor), Cuánto esta pagado (derecho del deudor).

4. Una empresa desea constituir un fondo de $40000 para reposición de una maquinaria al cabo de 5 años. Calcular el valor del depósito anual que debe realizar si se considera una tasa de interés de 14% anual y elaborar la tabla del fondo de amortización o de valor futuro correspondiente

Matemática financiera

5. Una empresa desea acumular un capital de $7000 en 4 años, mediante depósitos semestrales iguales en una institución financiera que le reconoce una tasa de interés de 15% anual, capitalizable semestralmente. Calcular el valor del depósito semestral, el valor acumulado y el saldo insoluto al final del período 6, reconstruir la tabla para período 7 y 8.

6. Una persona obtiene un préstamo de $30000 a 3 años plazo con una tasa de interés de 12% anual capitalizable mensualmente que se reajusta luego del primer año al 8% anual capitalizable mensualmente. Calcular la cuota original y la cuota con el reajuste, reconstruir la tabla para los pagos 13 y 14.

BIBLIOGRAFÍA

Ayres Frank Jr. Matemática Financiera, Ed. McGraw-Hill, México, 1979

Mora Zambrano, Armando, Matemática Financiera, Ed. McGraw-Hill Interamericana, Santafé de Bogotá, Colombia, 2001

Schaum, Matemática Financiera, Ed. McGraw-Hill Interamericana, Santafé de Bogota, Colombia, 2008

Apuntes Universitarios de Matemática Financiera 4to-5to Semestre de Ingeniería en Finanza ESPOCH, Ing. Marcelo Sánchez S.Ecuador, 2000-2001